

Systèmes à retards

Application à la commande de Réseaux TCP

Yassine ARIBA



UNIVERSITE
PAUL
SABATIER

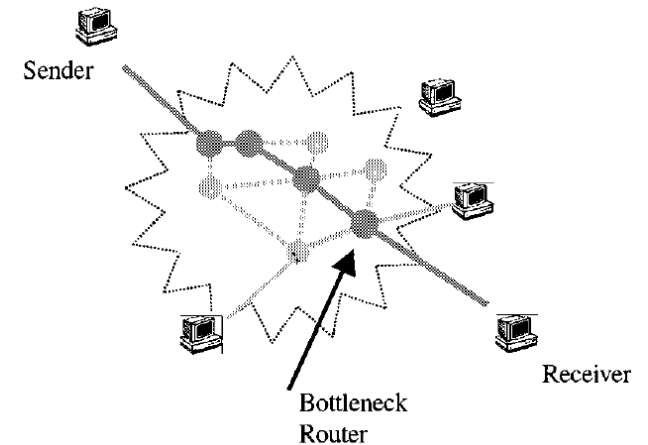
TOULOUSE III

Encadrants: **F. Gouaisbaut - Y. Labit**

Groupes: MAC - OLC

Réseau TCP “Transmission Control Protocol”

- *contrôle* le trafic des flux de données
- les flux circulent via des routeurs
- si trafic trop intense: congestion
- ⇒ Pertes, augmentation du retard
- ⇒ mauvaise qualité de service



★ Idée:

Appliquer la théorie de l'Automatique aux réseaux

→ [Hollot et *al*, 2002]: P,PI; [Quet et *al*, 2004]: \mathcal{H}_∞ ; [Kim, 2003]:
prédicteur.

→ [Michiels et Niculescu, 2005]: Lyapunov; [Kim, 2006]: retour d'état,
PID, prédicteur.

Modélisation de l'interaction sources-liens:

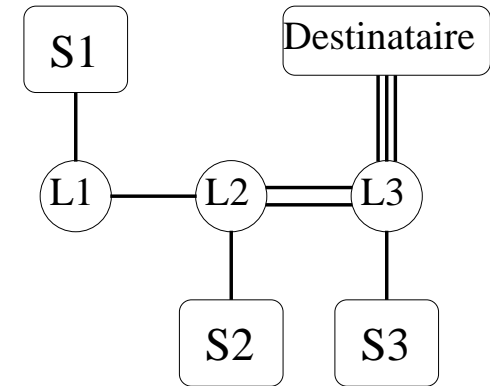
→ Modèle général, très connu dans la littérature.

Un réseau

→ ensemble de L liens

→ utilisés par un ensemble de N sources

→ chaque source i utilise un ensemble $L_i \subseteq L$ de liens



Ces ensembles définissent la *matrice de routage* $R \in \mathbb{R}^{L \times N}$:

$$R_{li} = \begin{cases} 1, & \text{si } l \in L_i \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}, \text{ par exemple: } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

la l^{ieme} ligne représente les sources empruntant le lien l .

la i^{ieme} colonne représente les liens empruntés par la source i .

Chaque source i envoie des paquets avec un débit $x_i(t)$.

→ On définit l'agrégat de flux à chaque lien:

$$y_l(t) = \sum_i R_{li} x_i(t - \tau_{li}^f), \quad \tau_{li}^f \text{ est le } \textit{forward delay} \text{ de la source } i \text{ au lien } l.$$

Chaque lien l renvoie une *mesure de la congestion* (ou *prix*) $p_l(t)$.

→ On définit l'agrégat des prix de tous les liens traversés par la source i .

$$v_i(t) = \sum_l R_{li} p_l(t - \tau_{li}^b), \quad \tau_{li}^b \text{ est le } \textit{backward delay} \text{ du lien } l \text{ à la source } i.$$

L'expression de $v_i(t)$ n'est pas exacte, valable seulement si $p_l \ll 1$.

Si l'on redéfinit la matrice de routage par deux matrices:

The delayed forward routing matrix:

$$[R_f(s)]_{li} = \begin{cases} e^{-\tau_{li}^f s}, & \text{si } l \in L_i \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

The delayed backward routing matrix:

$$[R_b(s)]_{li} = \begin{cases} e^{-\tau_{li}^b s}, & \text{si } l \in L_i \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc:

$$y(s) = R_s(s)x(s),$$
$$q(s) = R_b^T(s)p(s).$$

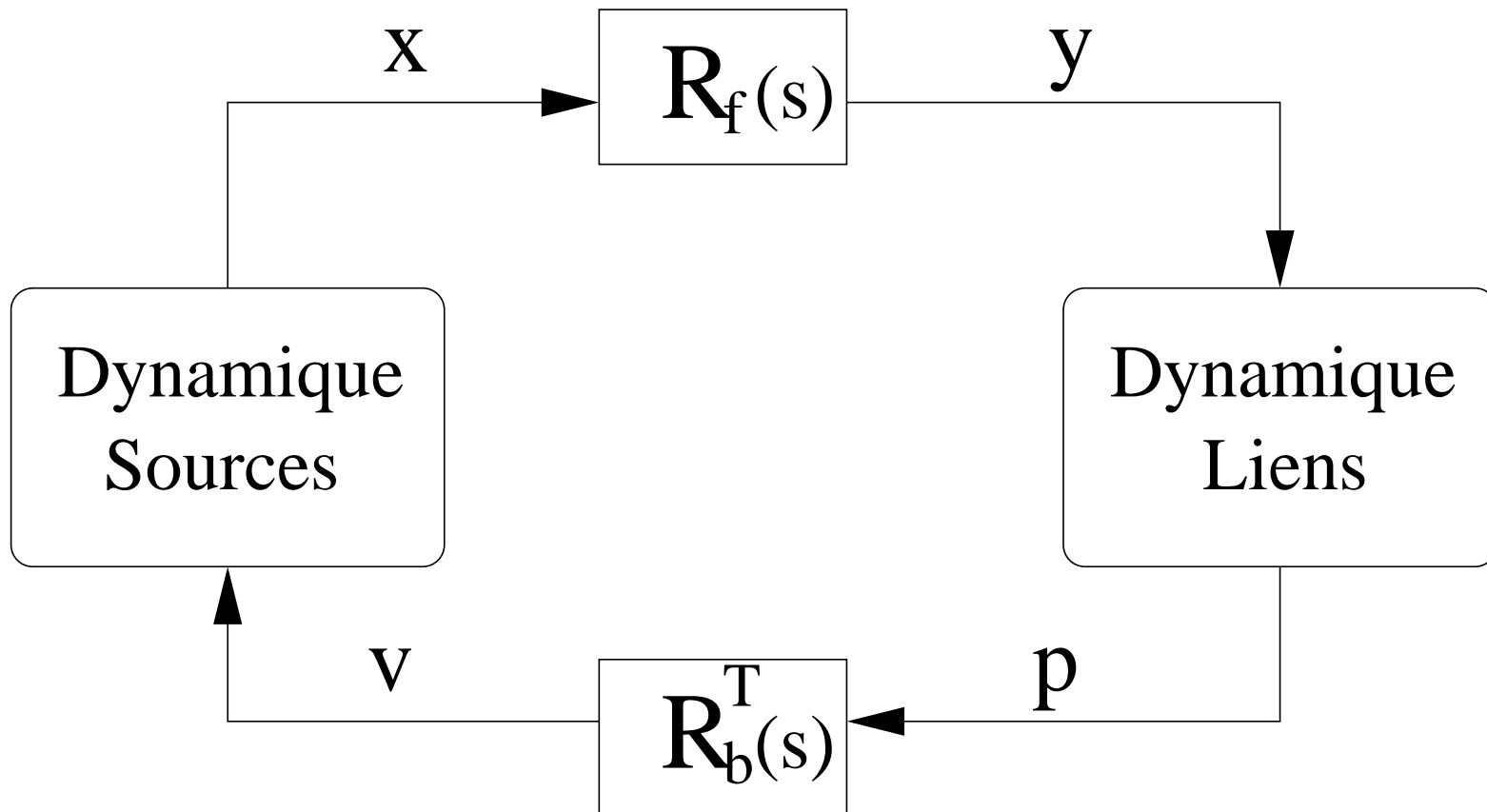
Reste à définir le système de contrôle de congestion:

(i) Comment les sources ajustent leur taux d'envoi par rapport à l'agrégat des prix.

→ Algorithme de TCP

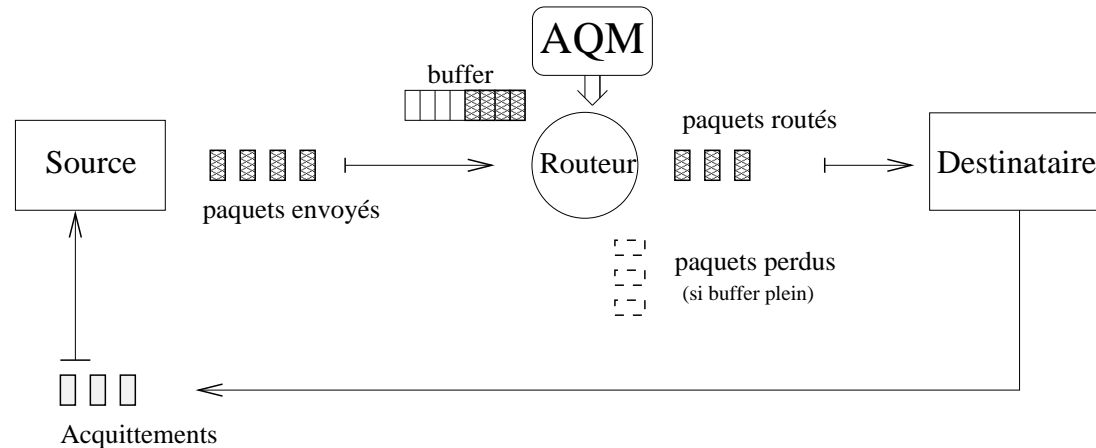
(ii) Comment les liens ajustent leur prix par rapport à l'agrégat de flux.

→ Algorithme des AQM



Interconnection entre les sources et les liens

Système considéré



La source envoie W paquets \rightarrow le receveur accuse réception

Si paquets transmis \rightarrow augmenter le taux d'envoi: $W+1$

Si pertes \rightarrow réduire le taux d'envoi: $W/2$

- Durée d'un échange: RTT (Round Trip Time)

$$R(t) = \text{temps de propagation} + \text{temps de file d'attente.}$$

- AQM par défaut: *DropTail*

Comportement bien connu du "Additive-increase Multiplicative-decrease".

Hypothèses:

- Le trafic est considéré comme *fluide*
↳ évolution de la fenêtre continue
- File d'attente modélisée par un *processus de Poisson*

Le modèle différentiel [Misra et al, 2000]

$$\begin{cases} \dot{W} = \frac{1}{R(t)} - \frac{W(t)W(t-R(t))}{2R(t-R(t))}p(t-R(t)) \\ \dot{q} = \frac{W(t)}{R(t)}N(t) - C \\ R = \frac{q(t)}{C} + T_p \end{cases}$$

Avec:

- W \doteq taille moyenne de la fenêtre (paquets)
- q \doteq taille moyenne de la file d'attente (paquets)
- R \doteq round trip time (RTT) (secondes)
- C \doteq capacité de la connection (paquets/seconde)
- N \doteq nombre de connection TCP
- p \doteq probabilité: mesure de congestion

Représentation par l'espace d'état

On pose: $x_1(t) = \delta W(t)$, $x_2(t) = \delta q(t)$ et $u(t) = \delta p(t)$.

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{N}{R_0^2 C} & -\frac{1}{C R_0^2} \\ \frac{N}{R_0} & -\frac{1}{R_0} \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{N}{R_0^2 C} & -\frac{1}{C R_0^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_d} x(t - R(t)) + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{C^2 R_0}{2N^2} \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(t - R(t))$$

Notre approche:

- modélisation par espace d'état des variables W et q .
- prise en compte du retard.

Hypothèses: N et le retard ($R(t) = h$) constants

Le but est donc d'étudier le système à retards:

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h) + Bu(t - h)$$

Etude des pôles

Résolution de l'équation caractéristique (quasipolynomiale):

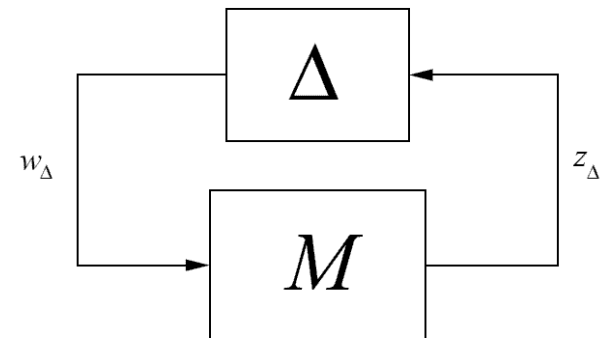
$$\Delta(s) = \det(sI_n - A - A_d e^{-hs}) = 0$$

- Méthode d'analyse, pas de synthèse.
- Ne permet pas l'étude de la robustesse.

Approche robuste

Transformation du système sous forme d'une interconnection:
M étant le système nominal, sans retard.

- Δ contient une expression du retard
- Avec les méthodes de la commande robuste on déduit des conditions sur le retard h.



Approche par Lyapunov

Extension de la théorie de Lyapunov classique \rightarrow *LyapunovKrasovskii*.

La théorie de Krasovskii considère une fonction $x_t(\theta)$ plutôt qu'un vecteur $x(t)$.

$$x_t(.) = \begin{cases} [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \theta \rightarrow x_t(\theta) = x(t + \theta) \end{cases}$$

Deux types de critères de stabilité:

- Critères *IOD* (Independent of Delay).

\Rightarrow Stabilité assurée quelque soit le retard $h \in \mathbb{R}^+$

- Critères *DD* (Dependent-Delay).

\Rightarrow Stabilité assurée sous certaines conditions sur le retard

Conditions de décroissance d'une fonction de Lyapunov

\rightarrow Critères *LM*.

Système à retards de forme: $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau)$

Equation caractéristique: $CE(s, \tau) = \sum_{k=0}^n a_k(s) e^{-k\tau s} = 0$

→ polynôme en deux variables s et $e^{\tau s}$: quasipolynôme

- On remplace les termes en $e^{-\tau s}$ [Rekasius, 1980]

$$e^{-\tau s} = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+, T \in \mathbb{R}.$$

avec $\tau = \frac{2}{\omega} [\tan^{-1}(\omega T) \pm l\pi], l = 0, 1, 2.. \infty$

→ substitution exacte pour $s = j\omega$.

Nouvelle équation caractéristique:

$$CE(s, T) = \sum_{k=0}^n a_k(s) (1 + Ts)^{n-k} (1 - Ts)^k = 0$$

- Tableau de Routh \Rightarrow polynômes en T .

\rightarrow Détection des changements de signe pour $T \in \mathbb{R}$: $T_k, k = 1, \dots, m$.

Pour chaque $T_k, CE(s, \tau)$ et $CE(s, T)$ ont des racines imaginaires pures $\pm j\omega_k$.

- Trouver les pôles imaginaires purs correspondants : $\{\omega\} = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$
- Déduction des retards τ correspondants (premières valeurs positives).

$$\tau_{kl} = \frac{2}{\omega} \left[\tan^{-1}(\omega T) \pm l\pi \right] \Big|_{\substack{\omega_k \\ T_k}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

- Sens de croisement de l'axe imaginaire:

$$RT \Big|_{\substack{\omega_k \\ \tau_{kl}}} = \text{sgn} \left[\text{Re} \left(\frac{ds}{d\tau} \Big|_{\substack{s = \omega_k i \\ \tau = \tau_{kl}}} \right) \right], \text{ pour } \begin{cases} k = 1, 2, \dots, m \\ l = 0, 1, \dots, \infty \end{cases}$$

\rightarrow On montre que RT est indépendant de la répétition du retard l .

Approche par Lyapunov

Fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii pour l'étude IOD.

$$V_1 = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h}^t x^T(s)Qx(s) ds \Rightarrow \begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PA_d \\ A_d^T P & -Q \end{bmatrix} \prec 0$$

→ Extension à la synthèse directe.

Approche analytique

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{N}{R_0^2 C} & -\frac{1}{C R_0^2} \\ \frac{N}{R_0} & -\frac{1}{R_0} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -\frac{N}{R_0^2 C} & -\frac{1}{C R_0^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t - R(t)) + \begin{bmatrix} -\frac{C^2 R_0}{2N^2} \\ 0 \end{bmatrix} u(t - R(t))$$

Pour R_0 , N et $C > 0$, A est hurwitz.

A_d peut être compensée par un retour d'état avec $K = [k_1 \ k_2]$ t.q. $\begin{cases} k_1 = \frac{2N^3}{R_0^3 C^3} \\ k_2 = -\frac{2N^2}{R_0^3 C^3} \end{cases}$

- Approche IOD \iff { terme retardé = perturbation }.

Fonctionnelle de Lyapunov Krasovskii choisie: [Gouaisbaut et al, 2006]

$$V(x_t) = x_t'(0)Px_t(0) + \int_{-\frac{h}{r}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{x}_t'(s)R\dot{x}_t(s)dsd\theta + \int_{-\frac{h}{r}}^0 \begin{pmatrix} x_t(s) \\ x_t(s - \frac{1}{r}h) \\ \vdots \\ x_t(s - \frac{r-1}{r}h) \end{pmatrix}' Q \begin{pmatrix} x_t(s) \\ x_t(s - \frac{1}{r}h) \\ \vdots \\ x_t(s - \frac{r-1}{r}h) \end{pmatrix} ds$$

Proposition 1 Σ stable pour $u(t) = 0$, si $\exists P, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{rn \times rn}$ définies positives et $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que

$$\begin{bmatrix} \frac{h}{r}R & P & 0 & 0 \\ P & -\frac{r}{h}R & \frac{r}{h}R & 0 \\ 0 & \frac{r}{h}R & -\frac{r}{h}R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & Q & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ \vdots & Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_{r+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & A & 0_{n \times (r-1)n} & A_d \end{bmatrix} + * \prec 0.$$

soit satisfaite.

Preuve

Soit le système à retards: $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h)$

On peut réécrire le Σ sous la forme:

$$S\xi = 0, \text{ avec } S = \begin{bmatrix} -I & A & 0_{n \times (r-1)n} & A_d \end{bmatrix} \text{ et } \xi = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ x(t - \frac{1}{r}h) \\ \vdots \\ x(t - \frac{r-1}{r}h) \\ x(t - h) \end{bmatrix}$$

A partir de la dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov Krasovskii, on obtient

$$\xi^T \Gamma \xi < 0 \tag{1}$$

Avec $\Gamma \in \mathbb{R}^{(r+2)n \times (r+2)n}$ symétrique et fonction de h , **P**, **Q** et **R** linéairement.

D'après le lemme de Finsler, $\exists X \in \mathbb{R}^{(r+2)n \times n}$ tel que

$$\Gamma + \mathbf{X}S + S^T \mathbf{X}^T < 0 \tag{2}$$

Proposition 2 Σ stable pour $u(t) = Kx(t)$, si $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{rn \times rn}$ définies positives et $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($i = 2, \dots, r + 3$) telles que

$$\Gamma + \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_{r+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & A^T & 0 & \dots & 0 & A_d^T + K^T B^T \end{bmatrix} + * < 0$$

soit satisfaite. Le gain stabilisant est donné par K .

Pour la synthèse: problème *BMI*.

★ Algorithme de relaxation:

- on fixe les multiplieurs P_i .
- on alterne les phases analyses et synthèses.

→ solution optimale localement.

→ problème d'initialisation.

- initialisation systématique avec le gain K *IOD*.

★ Algorithme du cône complémentaire.

Principe de α -Stabilité

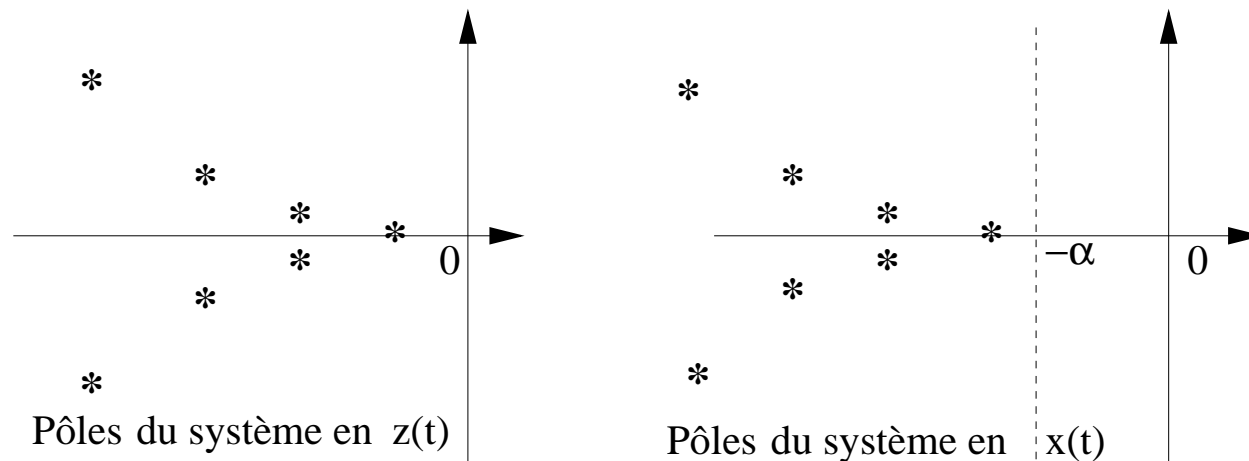
On considère un nouveau système: $z(t) = e^{\alpha t} x(t)$

$$\dot{z}(t) = (\alpha I + A)z(t) + e^{\alpha h} A_d z(t - h)$$

α impose la dynamique minimale de convergence.

→ On applique les critères au nouveau système en $z(t)$.

→ Si le système en $z(t)$ stable alors le système en $x(t)$ α -stable.



$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{N}{R_0^2 C} & -\frac{1}{C R_0^2} \\ \frac{N}{R_0} & -\frac{1}{R_0} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -\frac{N}{R_0^2 C} & -\frac{1}{C R_0^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-h) + \begin{bmatrix} -\frac{C^2 R_0}{2N^2} \\ 0 \end{bmatrix} u(t-h)$$

Retard $h = R_0$ pas connu précisément.

→ On suppose $R_0 \in [R_{0_{min}}, R_{0_{max}}]$.

Méthode: considérer un ensemble de systèmes au lieu d'un seul.

→ Utilisation de polytopes.

Problème A, A_d sont non linéaires en R_0 .

→ Ensemble incertain Ω non convexe.

★ idée: on pose $\rho_1 = \frac{1}{R_0}$, $\rho_2 = \frac{1}{R_0^2}$ et $\rho_3 = R_0$.

- Les matrices du système sont linéaires en les ρ_i
- L'ensemble \mathcal{P} généré par la variation de R_0 est un polytope.

Le polytope englobe le système incertain: $\Omega \subset \mathcal{P}$

\mathcal{P} stable $\Rightarrow \Omega$ stable

Exemple numérique

60 sources envoient des paquets via un routeur.

temps de propagation $T_p = 0.2s$, taille de buffer de référence $q_{ref} = 175$ paquets, bande passante $C = 15Mb/s$. RTT résultant $R_0 = 0.247s$.

Stabilisation d'un polytope

$$\text{synthèse IOD} \begin{cases} R_{0_{min}} = 0.1 \\ R_{0_{max}} = 0.4 \end{cases} \quad \text{synthèse DD} \begin{cases} R_{0_{min}} = 0.1 \\ R_{0_{max}} = 0.5 \end{cases}$$

Performances

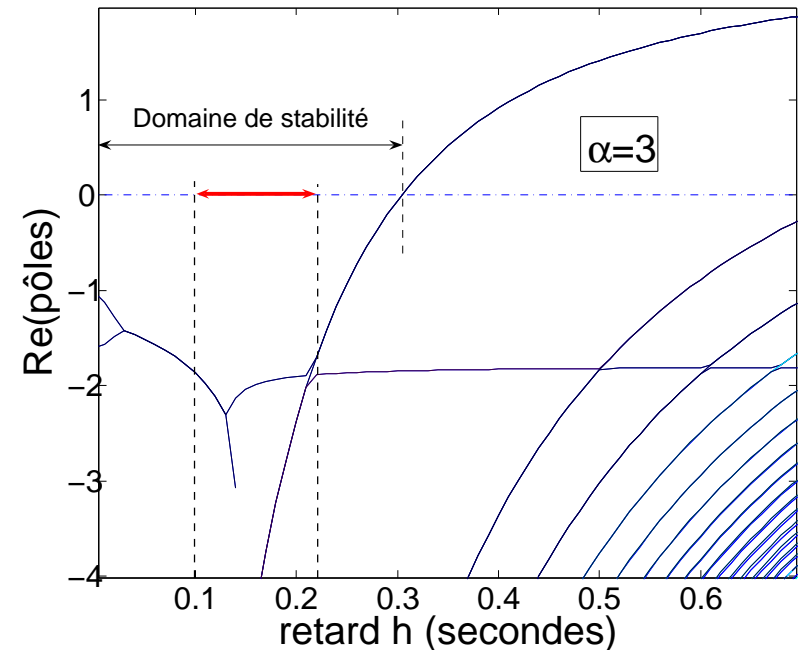
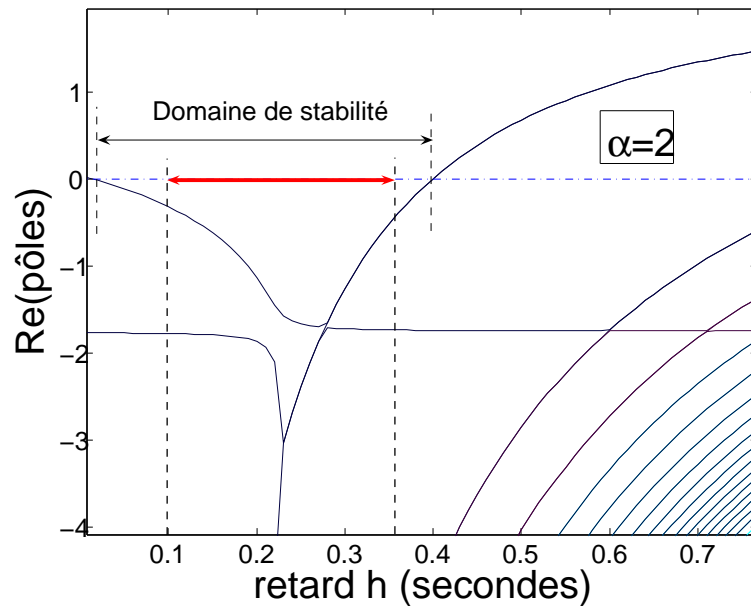
	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
nominal: h_{max}	0.9	0.36	0.22
polytope: $R_{0_{max}}$	0.3	0.25	

valeur minimale du retard $R_{0_{min}} = h_{min} = 0.1$.

Exemple numérique

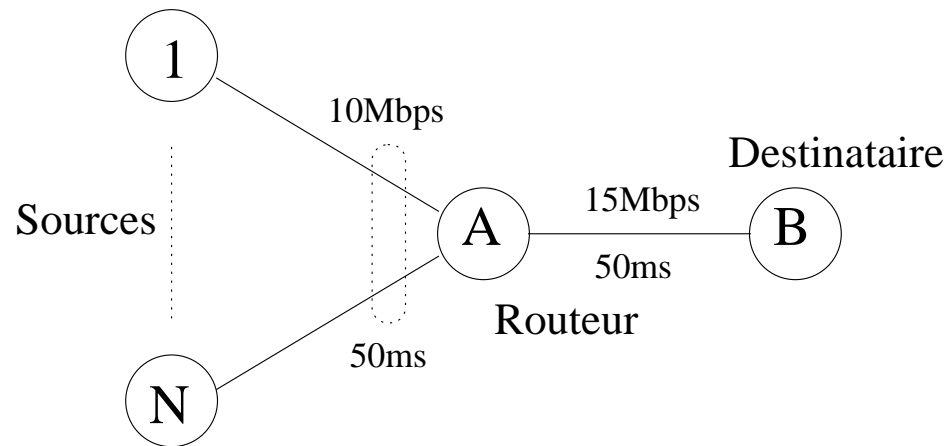
Evolution des pôles de $z(t)$ pour $h \in \mathbb{R}^+$:

$$\text{écart théorique: } \begin{cases} \alpha = 2 \rightarrow h \in [0.1, 0.36] \\ \alpha = 3 \rightarrow h \in [0.1, 0.22] \end{cases}$$



★ Validation avec le logiciel *DDE-BIFTOOL*: méthodes numériques d'analyse.
(K. Engelborghs, Université de Leuven, Belgique)

- Interface Tcl (*Tool Command Language*): Topologie, configuration et scénario



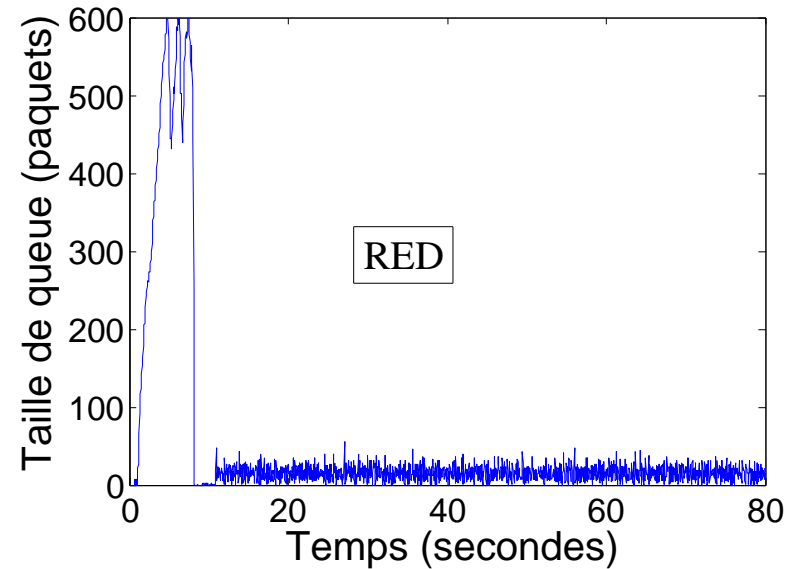
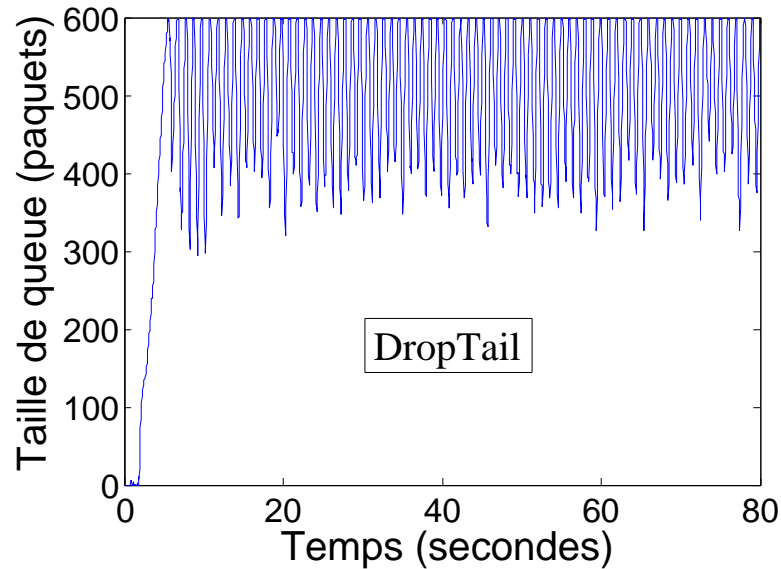
- Noyau C++: Programmation et intégration de modules.

Interface → spécification de la discipline de buffer: *DropTail*, *RED*...

```
$ns duplex-link $A $B 15Mb 50ms DropTail
```

Ajout de nos propres AQM: *PI*, *GAIN-K*

→ Implémentation dans le noyau



DropTail:

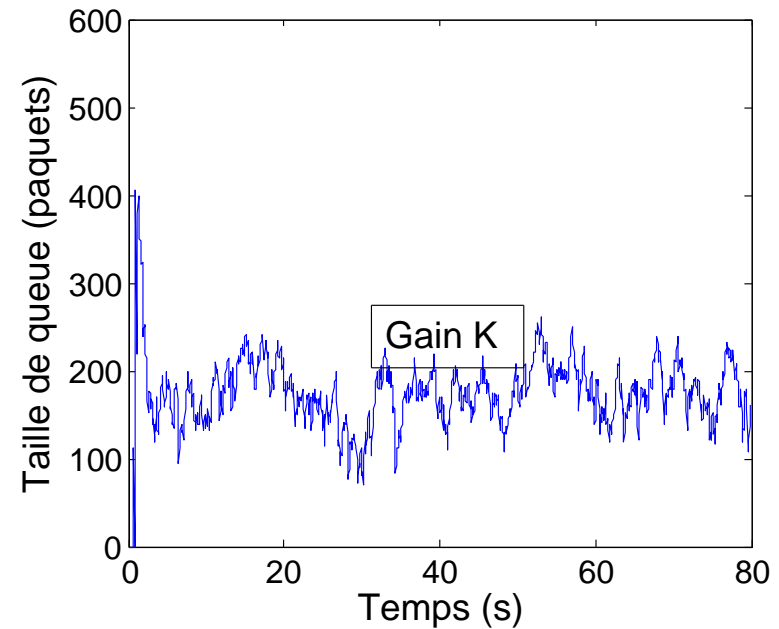
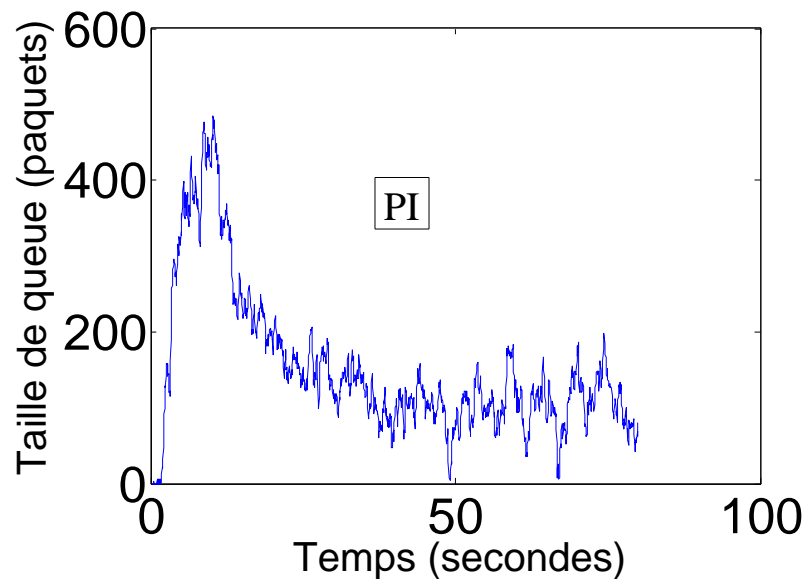
Stratégie antérieure aux AQM

- Laisse passer tous les paquets tant que possible.
- Si buffer plein \rightarrow paquets perdus ($p = 1$).

RED:

But: Anticiper la congestion

- Ejection de paquets avec une certaine probabilité.
- Méthode intuitive et empirique.
- Réglages difficiles.



AQM par l'Automatique:

- PI: 1^{er} AQM issue de la théorie de la commande
- Problème de régulation
- Choix du point d'équilibre: problème d'optimisation
- Objectifs:
 - Utilisation du buffer efficace: ni saturé, ni quasi-vide (sous utilisation)
 - Limiter le temps de latence

Partie Automatique

- Améliorer les critères de stabilisation → réduire le conservatisme
 - ⇒ Mise sous forme (\mathcal{LMI})
- Envisager d'autres approches
 - ⇒ Commande robuste
 - ⇒ Forme singulière: retard \in état du système

Partie Réseaux

- Valider la théorie
 - ⇒ Simulateur: logiciel *NS*
 - ⇒ Emulation sur plate-forme
- Prise en compte de difficulté supplémentaire (incertitudes, variations)
- Etude sur des réseaux plus complexes.
- Etude sur d'autres protocoles de communication.

Modèle avec un seul routeur et des sources hétérogènes

basée sur le modèle de (Misra, Hollot...): cas *Single link and heterogeneous sources*:

$$\begin{cases} \dot{w}_i(t) = \frac{1}{\tau_i(t)} - \frac{w_i(t-\tau_i^*)w_i(t)}{2\tau_i(t-\tau_i^*)}p(t-\tau_i^*) \\ \dot{q}(t) = -c + \sum_{i=1}^N \frac{w_i(t)}{\tau_i(t)} \\ \tau_i = d_i + \frac{q(t)}{c} \end{cases}$$

Linéarisation:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta \dot{W}_1(t) \\ \vdots \\ \delta \dot{W}_N(t) \\ \delta \dot{q}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_N & b_N \\ \frac{1}{R_{10}} & \frac{1}{R_{20}} & \dots & \frac{1}{R_{N0}} & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta W_1(t) \\ \vdots \\ \delta W_N(t) \\ \delta q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & c_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x(t-h_1) \\ &+ \dots + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_N & c_N \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-h_N) + \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} p(t-h_1) + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_N \\ 0 \end{bmatrix} p(t-h_N) \end{aligned}$$