

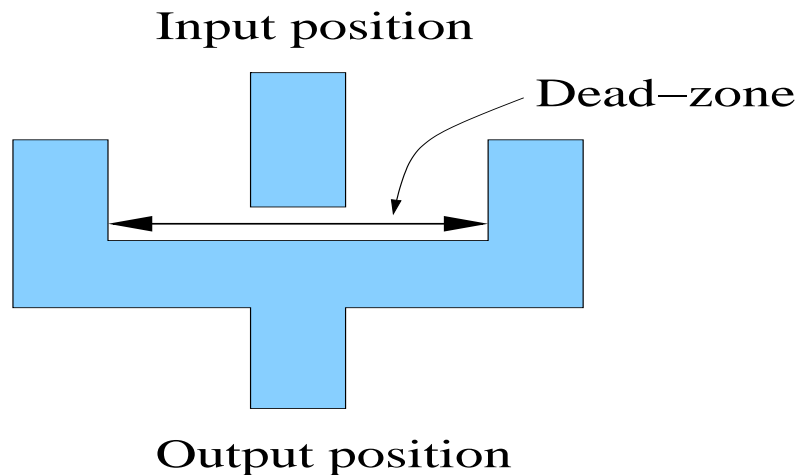
Analyse de la stabilité pour un système avec backlash

SOPHIE TARBOURIECH

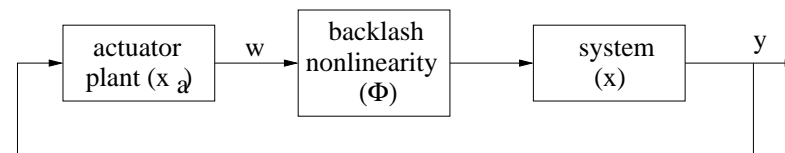
Présentation issue de 2 papiers publiés avec Christophe Prieur : ROCOND 2006 et CDC 2006. Une version revue avec Christophe Prieur et Isabelle Queinnec est en cours.

1. Introduction
2. Description du système
3. Formulation du problème
4. Résultats préliminaires
5. Analyse en stabilité
6. Ensemble de points d'équilibre
7. Exemple illustratif
8. Discussion

- Les non-linéarités de type backlash sont présentes dans les systèmes mécaniques et le fait de les négliger durant les phases de synthèse ou d'analyse peut conduire à une dégradation des performances, voire à la perte de la stabilité.
- Quelques exemples



- La classe de systèmes non-linéaire considérée : un opérateur non-linéaire et non-lisse en sandwich entre un système et un actionneur.



- ▷ Des non-linéarités non-lisses apparaissent souvent dans les systèmes de commande réels, du fait de contraintes physiques, technologique, de sécurité ou encore dues à des imperfections...
- ▷ La non-linéarité considérée ici est un **backlash**.
- ▷ Différentes approches dans la littérature :
(Nordin et al, 2002 : aperçu sur les différents modèles), (Coradini and Orlando, 2002 : modes glissants), (Taware and Tao, 2003 : inversion de la non-linéarité)

- Nous proposons une approche basée sur l'utilisation de fonctionnelles de Lyapunov quadratiques et des conditions de secteurs généralisées utilisant la connaissance sur la non-linéarité.
 - ▷ Contrairement aux résultats développés dans (Paré et al, 1998 and 2001), les conditions ne nécessitent pas de vérifier des hypothèses particulière sur le gain statique du système (matrices à $s = 0$).

- Le système initial est décrit par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B\Phi[w] \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $y \in \mathbb{R}^m$ est la sortie et w est l'entrée de la non-linéarité Φ .

- L'entrée de la non-linéarité est la sortie de l'actionneur :

$$\begin{aligned}\dot{x}_A &= A_A x_A + B_A y \\ w &= C_A x_A\end{aligned}\tag{2}$$

où $x_A \in \mathbb{R}^p$ est l'état de l'actionneur. Les matrices A , A_A , B , B_A , C and C_A sont constantes et de dimensions appropriées.

▷ Les matrices A et A_A sont Hurwitz.

- Φ est une fonction backlash, pour tout $w \in \mathcal{C}^1([0, +\infty]; \mathbb{R}^m)$, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$\dot{(\Phi[w](t))}_{(i)} = \begin{cases} \ell_{(i)} \dot{w}_{(i)}(t) \text{ si } \dot{w}_{(i)}(t) > 0 \\ \quad \text{et } (\Phi[w](t))_{(i)} = \ell_{(i)}(w(t) - c_{r(i)}) \\ \ell_{(i)} \dot{w}_{(i)}(t) \text{ si } \dot{w}_{(i)}(t) < 0 \\ \quad \text{et } (\Phi[w](t))_{(i)} = \ell_{(i)}(w(t) - c_{l(i)}) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (3)$$

où (ℓ_1, \dots, ℓ_m) est donné dans \mathbb{R}_+^m .

- Les vecteurs c_r et c_l sont donnés dans \mathbb{R}^m tels que

$$c_{l(i)} \preceq 0 \preceq c_{r(i)}$$

- ▷ Φ est une non-linéarité avec une **contrainte de pente**.
- ▷ C'est un opérateur avec **mémoire**.

- Nous considérons que la non-linéarité est active, c'est-à-dire, nous sommes intéressés par les conditions initiales $x_A(t = 0) = x_A(0)$ satisfaisant :

$$L(C_A x_A(0) - c_l) \succeq \Phi[C_A x_A](0) \succeq L(C_A x_A(0) - c_r) \quad (4)$$

- Problème :

Déterminer l'ensemble de points d'équilibre associé au système (1), (2) et (3) vers lequel le système converge lorsqu'il est initialisé dans l'ensemble (4).

- Nous définissons tout d'abord la matrice $L = \text{diag}(\ell_1, \dots, \ell_m)$.
- **Lemme 1.** Pour toute matrice diagonale définie positive N_1 and N_2 dans $\mathfrak{R}^{m \times m}$, nous avons, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $w \in \mathcal{C}^1([0, +\infty]; \mathfrak{R}^m)$,

$$\overbrace{\dot{\Phi}[w](t)}' N_1 (\Phi[w](t) - Lw(t)) \leq 0, \quad (5)$$

$$\overbrace{\dot{\Phi}[w](t)}' N_2 (\overbrace{\dot{\Phi}[w](t)} - L\dot{w}(t)) \leq 0. \quad (6)$$

- Rappelons que l'opérateur backlash est défini en fonction de la dérivée de son entrée
⇒ Nous allons donc étudier la version dérivée du système (1) et (2).
- En considérant l'état augmenté

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_A \end{pmatrix}$$

le système s'écrit comme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{X}} &= \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B} \overbrace{\Phi[w]}^{\cdot} \\ \mathbb{W} &= \mathbb{C}\mathbb{X} \end{aligned} \tag{7}$$

avec

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B_A C & A_A \end{pmatrix} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & C_A \end{pmatrix}$$

- **Proposition 1.** S'il existe 2 matrices symétriques définies positives $P \in \mathfrak{R}^{(n+p) \times (n+p)}$, $M \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, 2 matrices diagonales définies positives N_1 et N_2 dans $\mathfrak{R}^{m \times m}$ satisfaisant

$$N_1 + \frac{(N_1 L C A^{-1} B + (N_1 L C A^{-1} B)')}{2} - M > 0 \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} A' P + P A & P B + C' L N_2 + (A^{-1})' C' L N_1 \\ \star & -2N_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (9)$$

alors le système (7) est asymptotiquement stable pour toutes conditions initiales $x_A(t=0) = x_A(0)$ satisfaisant (4).

- Quelques éléments de preuve :

- ▷ Utilisation des conditions de secteurs généralisées du Lemma 1

- ▷ fonction de Lyapunov candidate

$$V(\mathbb{X}, w, t) = \mathbb{X}(t)' P \mathbb{X}(t) + Q + \Phi(t)' M \Phi(t)$$

$$-2 \int_0^t \dot{\Phi}(s)' N_1 (\Phi(s) - Lw(s)) ds - 2 \int_0^t \dot{\Phi}(s)' N_2 (\dot{\Phi}(s) - LC\mathbb{X}(s)) ds$$

- ▷ On obtient :

$$\dot{V} = \mathbb{X}' P \dot{\mathbb{X}} + \dot{\mathbb{X}}' P \mathbb{X} + \dot{Q} - 2\dot{\Phi}' N_1 (\Phi - Lw) - 2\dot{\Phi}' N_2 (\dot{\Phi} - LC\mathbb{X}) + 2\dot{\Phi}' M \Phi$$

- ▷ En notant que l'on a : $\mathbb{X} = \mathbb{A} \begin{pmatrix} x \\ x_A \end{pmatrix} + \mathbb{B}\Phi$, on peut remplacer dans

l'expression de \dot{V} le terme $w = C_A x_A = \mathbb{C} \begin{pmatrix} x \\ x_A \end{pmatrix}$ par $\mathbb{C}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\Phi)$

- ▷ En choisissant $Q = \Phi'(N_1 + N_1 LC\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} - M)\Phi$ on peut annuler les termes croisés entre $\dot{\Phi}$ et Φ dans l'expression de \dot{V} .

- Remarques:

- ▷ Les relations (8) et (9) de la Proposition 1 sont linéaires dans les variables de décisions P , M , N_i , $i = 1, 2$. Le test de leur faisabilité peut donc être fait en utilisant un solveur LMI.
- ▷ Nous n'avons pas besoin de supposer que la matrice $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$ est symétrique comme dans (Paré et al, 2001).
- ▷ Nous n'avons pas besoin de vérifier une égalité du type $N\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} = \mathbb{B}'(\mathbb{A}^{-1})'\mathbb{C}'N$ comme dans (Paré et al, 1998).

- La Proposition 1 garantit la convergence à l'origine du vecteur \mathbb{X} . En utilisant cette proposition, nous pouvons proposer un **résultat de convergence** pour le système de départ (1) et (2).

- **Proposition 2.** Supposons que la matrice $I - LC_A A_A^{-1} B_A C A^{-1} B$ est non-singulière, alors en définissant les matrices et vecteurs suivants

$$R = (I - LC_A A_A^{-1} B_A C A^{-1} B)^{-1} \quad (10)$$

$$S = (-A^{-1} B)_+ (-R_+ Lc_l + R_- Lc_r) - (-A^{-1} B)_- (-R_+ Lc_r + R_- Lc_l) \quad (11)$$

$$T = (-A^{-1} B)_+ (-R_+ Lc_r + R_- Lc_l) - (-A^{-1} B)_- (-R_+ Lc_l + R_- Lc_r) \quad (12)$$

nous pouvons caractériser l'ensemble de point d'équilibre du système (1)-(2) :

$$\mathcal{E} = \left\{ (x^e, x_A^e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbb{S} \succeq \begin{pmatrix} x^e \\ x_A^e \end{pmatrix} \succeq \mathbb{T} \right\} \quad (13)$$

avec

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} S \\ (-A_A^{-1} B_A C)_+ S - (-A_A^{-1} B_A C)_- T \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} T \\ (-A_A^{-1} B_A C)_+ T - (-A_A^{-1} B_A C)_- S \end{pmatrix} \quad (15)$$

- Quelques éléments de preuve :

▷ En posant $x_A^e(t=0) = x_A^e(0)$, notons que, si on a

$$L(C_A x_A^e(0) - c_l) \succeq \Phi(t=0) \succeq L(C_A x_A^e(0) - c_r) \text{ alors, avec (3), on a}$$

$$L(C_A x_A^e(t) - c_l) \succeq \Phi(t) \succeq L(C_A x_A^e(t) - c_r), \forall t \geq 0$$

▷ Considérons (x^e, x_A^e) un point d'équilibre de (1)-(2). Alors

$$Ax^e + B\Phi[C_A x_A^e] = 0 \text{ et } A_A x_A^e + B_A C x^e = 0. \text{ Donc } x_A^e = A_A^{-1} B_A C A^{-1} B \Phi$$

▷ On a $-Lc_l \succeq (I - LC_A A_A^{-1} B_A C A^{-1} B) \Phi \succeq -Lc_r$

▷ En définissant $R = (I - LC_A A_A^{-1} B_A C A^{-1} B)^{-1}$ on peut écrire

$$R = R_+ - R_-, \text{ où } R_+ \text{ et } R_- \text{ sont 2 matrices non-negatives.}$$

▷ On obtient $-R_+ Lc_l + R_- Lc_r \succeq \Phi \succeq -R_+ Lc_r + R_- Lc_l$ et, avec

$$x^e = -A^{-1} B \Phi, \text{ on a } S \succeq x^e \succeq T \text{ avec}$$

$$S = (-A^{-1} B)_+ (-R_+ Lc_l + R_- Lc_r) - (-A^{-1} B)_- (-R_+ Lc_r + R_- Lc_l)$$

$$T = (-A^{-1} B)_+ (-R_+ Lc_r + R_- Lc_l) - (-A^{-1} B)_- (-R_+ Lc_l + R_- Lc_r)$$

- En combinant les Propositions 1 and 2, nous pouvons proposer une solution au problème.
- **Théorème 1.** S'il existe 2 matrices symétriques définies positives $P \in \mathfrak{R}^{(n+p) \times (n+p)}$, $M \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, 2 matrices diagonales définies positives N_1, N_2 in $\mathfrak{R}^{m \times m}$ telles que (8) et (9) sont satisfaites alors, pour toute condition initiale dans (4), la solution de (1)-(2) converge vers un point de \mathcal{E} défini par (13).
- **Quelques extensions sont possibles :**
 - ▷ La matrice $R = (I - LC_A A_A^{-1} B_A C A^{-1} B)$ n'est pas inversible.
 - ▷ Le cas symétrique : $c_r = -c_l$
 - ▷ Les coefficients c_r et c_l qui définissent la non-linéarité Φ sont constants mais inconnus, comme cela est étudié dans (Parlangeli and Corradini, 2005).
 - ▷ Le cas d'une non-linéarité de type zone-morte.

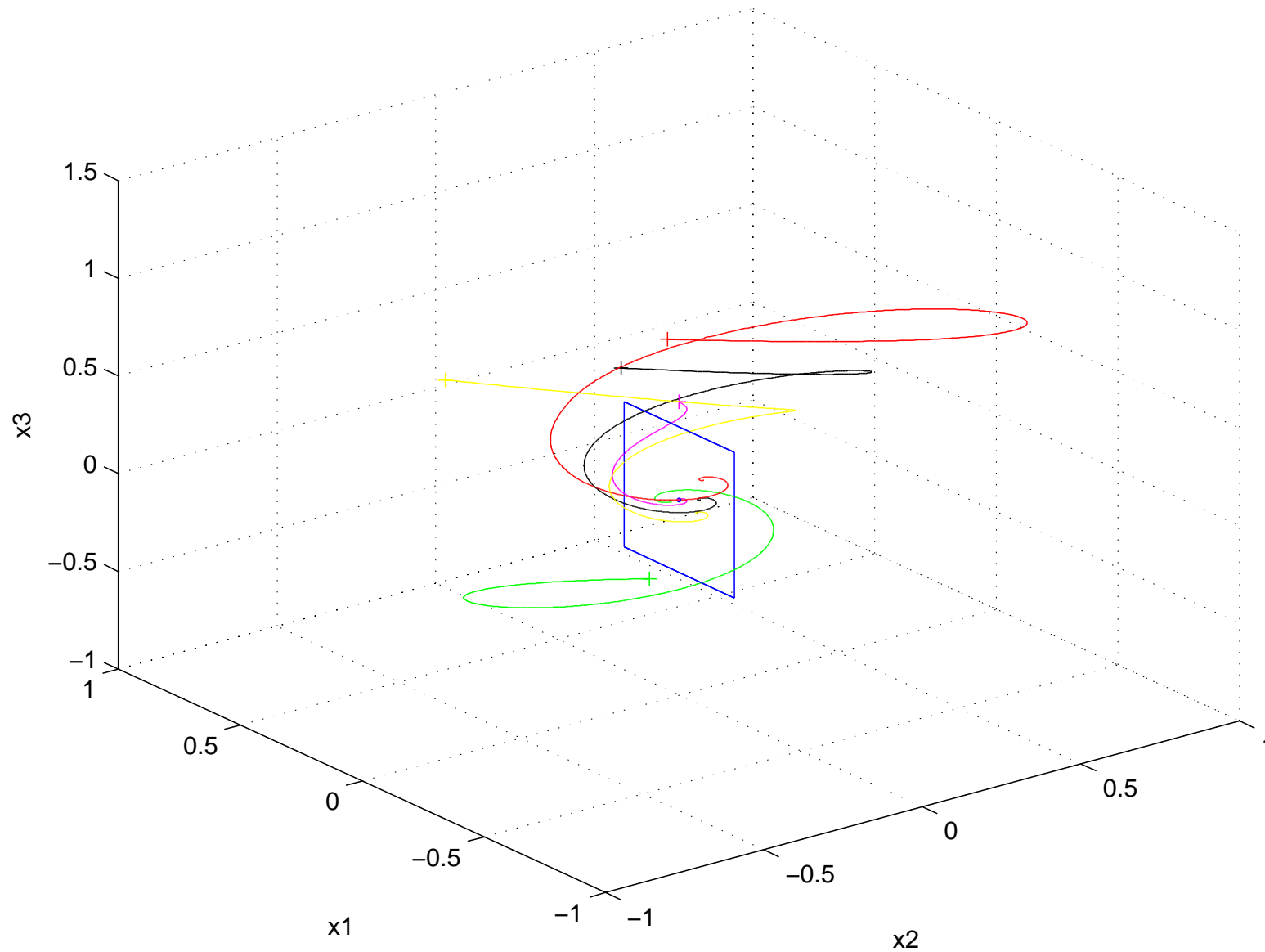
- Le système augmenté (7) est défini à partir des matrices suivantes (Paré et al, 1998 and 2001) :

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -0.5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \mathbb{B} = \begin{bmatrix} -0.19365 & -0.41312 \\ 0 & 0.41312 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1.875 & -0.1875 & 0.09375 \\ 1 & 0.75 & 0 \end{bmatrix}$$

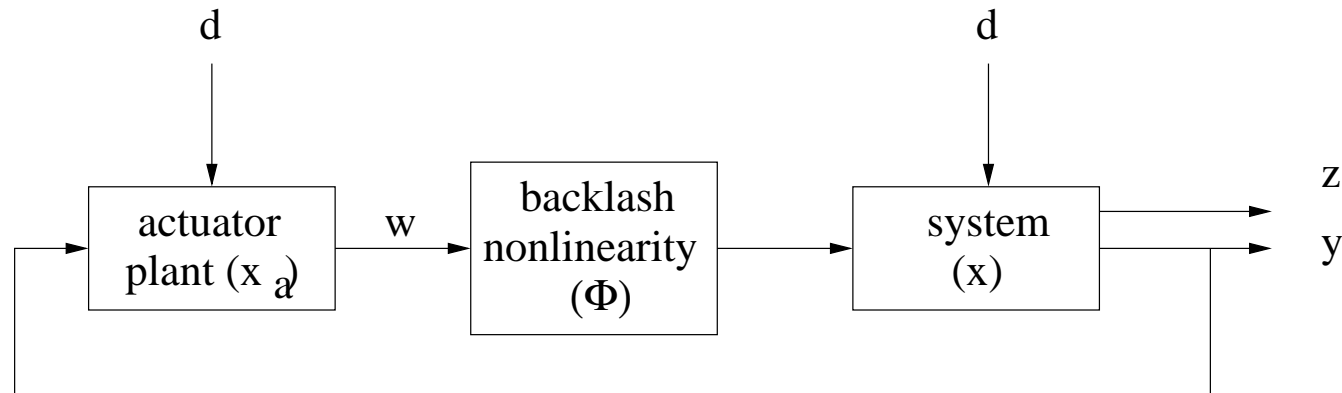
- Le backlash est défini par

$$\ell_{(i)} = 1, i = 1, 2; c_{r(i)} = 0.5, i = 1, 2; c_{l(i)} = -0.5, i = 1, 2; (\text{deadband} = c_r - c_l = 1)$$

7. Exemple illustratif (2/2)



- Performance \mathcal{L}_2 (condition sur d et \dot{d})



- Actionneur non-linéaire : présence de saturation en amplitude et en vitesse
 - ▷ Modèle de l'actionneur décrit par

$$\begin{aligned} \dot{x}_A &= \text{sat}_r(A_A x_A + B_A \text{sat}_p(u_A)) \\ w &= C_A x_A \end{aligned}$$

▷ Complexité si on a $\dot{x} = Ax + B \text{sat}_p(\Phi[w])$.

- Problème de synthèse : déterminer u_A
- Approche anti-windup