Complexité du problème d'insertion d'activités dans un RCPSP avec écarts minimaux et maximaux

Christian Artigues et Cyril Briand

25 février 2008

Problème d'insertion : problème d'ordonnancement pour lequel l'ensemble des activités A est divisé en deux ensembles

- L'ensemble des activités déjà ordonnancées $A \setminus I$ (constituant l'ordonnancement de référence).
- L'ensemble des activités non ordonnancées I (devant être insérées).

Résoudre le problème d'insertion revient à ordonnancer l'ensemble des activités de A

- sous des contraintes d'ordonnancement (précédences, fenêtres de temps, ressources).
- en optimisant une fonction objectif (makespan,...).
- avec des contraintes ou un objectif de **stabilité** : l'ordonnancement proposé doit être "proche" de l'ordonnancement de référence.

Importance des problèmes d'insertion

Ordonnancement réactif

- Insertion d'activités imprévues sans réordonnancement complet.

Recherche locale

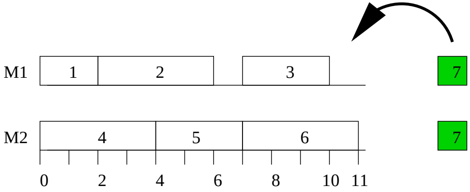
- Voisinages définis par réinsertions d'activités (critiques).

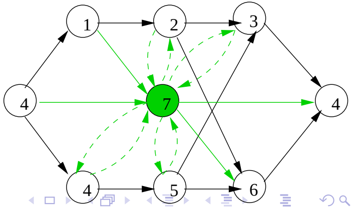
Enjeux pour la conception d'un algorithme d'insertion

- rapide, de préférence polynomial.
- l'espace de recherche doit contenir suffisament de solutions.

Graphe disjonctif $G = (V, U, E)$

- n sommets V.
- Contraintes de précédence (originales et issues de l'ordo. de référence) $\longrightarrow$ arcs orientés U.
- E est l'ensemble des paires d'arcs disjonctifs liant toute activité non ordonnancée avec toute autre activité de même machine.
- valuation des arcs par la durée de l'activité origine.
- sommets fictif 0 ($n+1$) prédécesseur (successeur) de toutes les activités A.





Travaux réalisé pour l'insertion dans les graphes disjonctifs

- Vaessens, R.J.M., Generalized Job Shop Scheduling : Complexity and Local Search, Ph.D. thesis, Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology, 1995.
- F. Werner and A. Winkler, Insertion techniques for the heuristic solution of the job shop problem, Discrete Applied Mathematics 58 (1995)
- P. Brucker and J. Neyer, Tabu-search for the multi-mode job-shop problem, OR Spektrum 20 (1998)
- Y.N. Sotskov, T. Tautenhahn and F. Werner, On the application of insertion techniques for job shop problems with setup times, RAIRO Operations Research. 33 (1999)
- C. Artigues and F. Roubellat, An efficient algorithm for operation insertion in a multi-resource job-shop schedule with sequence-dependent setup times, Production Planning and Control 2 (2002)
- T. Kis and A. Hertz, A lower bound for the job insertion problem, Discrete Applied Mathematics 128 (2003)
- H. Gröflin and A. Klinkert, Feasible insertions in job shop scheduling, short cycles and stable sets, 177 (2007)

Le problème d'ordonnancement de projet avec précédences généralisées(RCPSP/max)

Définition

- une ressource de disponibilité B
- n activités.
- chaque activité doit être ordonnancée sans interuption sur b_i unités **non spécifiées** de la ressource.
- La disponibilité de la ressource doit êtr respectée à chaque période de temps.
- Contraintes de précédences généralisées $S_j - S_i \geq l_{ij}$, une valeur quelconque.
- Objectif : minimiser la durée totale.

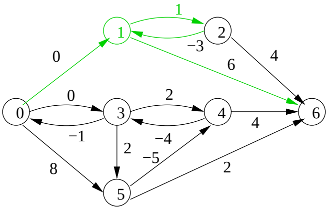
Exemple de problème d'insertion

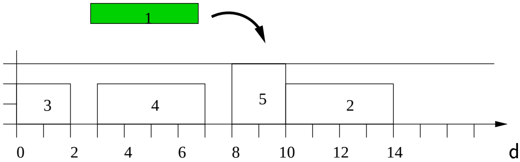
Data

- $m = 3$
- $n = 5$, $I = \{1\}$

i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0	6	4	2	4	2	0
b_i	0	1	2	2	2	3	0

- Contraintes de précédence et ordonnancement de référence





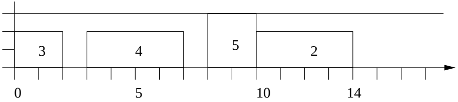
de

Neumann *el al* (2003)

Flots d'unités de ressource

Définition

- Le flot $f_{ij} \geq 0$ d'une activité i vers une activité j donne le nombre d'unités de ressources pour lesquelles j est un successeur direct de i.
- Chaque activité a une demande de b_i unités.
- L'activité 0 est une source de B unités et $n+1$ est un puits.
- Un flot est valide pour V s'il satisfait la propriété de conservation et la demande de chaque activité de V.



Le flot suivant est valide pour $A \setminus \{1\}$: $f_{03} = 2$, $f_{34} = 2$, $f_{45} = 2$, $f_{05} = 2$, $f_{52} = 2$, $f_{56} = 1$, $f_{26} = 1$.

Fortemps and Hapke (1997), Artigues and Roubellat (2000), Neumann *el al* (2003)

Formulation du problème d'insertion basée sur les flots (Resource-Constrained Activity insertion Problem)

Flot de référence

Un flot de référence est un flot valide pour $A \setminus I$ tel que

- Aucun flot ne traverse I
- $S_j < S_i + p_i$ dans l'ordonancement de référence $\Rightarrow f_{ijk} = 0$

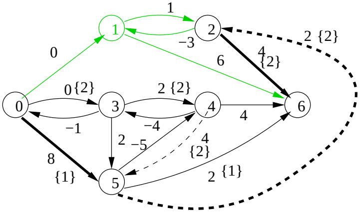
Graphe induit par le flot

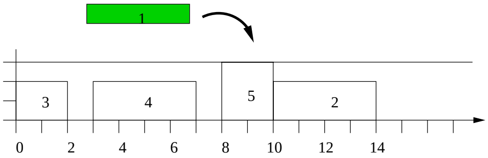
Graphe de précédence augmenté des arcs (i, j) valués par p_i pour chaque flot $f_{ij} > 0$.

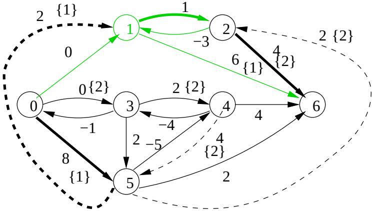
Formulation du RCAIP

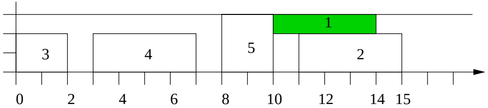
A partir du flot de référence f, trouver un flot f' valide pour A dont le graphe induit à une longueur de plus long chemin entre 0 et $n+1$ minimale **sans augmenter la valeur du flot entre deux activités de $A \setminus I$.**

Problème d'insertion d'une seule activité









Remarque

Une position d'insertion peut être représentée par une coupe partielle (α, β) du graphe induit par l'ordonnancement de référence telle que $\sum_{i \in \alpha, j \in \beta} f_{ij} \geq b_i$

Caractérisation des insertions réalisables pour la variante décisionnelle du RCAIP

Variante décisionnelle

Variante telle que $C_{\max} \leq v$, valeur de l'arc $(n+1,0) = \max(l_{(n+1)0}, -v)$.

Matrice des distances

- δ^v_{ij} est la longueur du plus long chemin de i à j dans le graphe induit par le flot pour une durée totale d'au plus v.
- δ^v se calcule en $O(n^3)$ par l'algorithme de Floyd-Warshall.

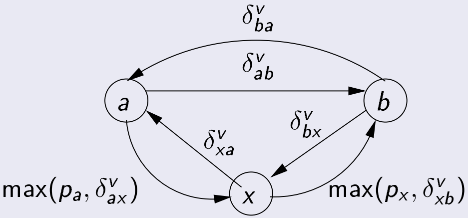
Condition nécessaire d'existence

Il n'y a pas de solution de durée d'au plus v si le problème de calcul de δ^v n'a pas de solution.

Caractérisation des insertions réalisables pour la variante décisionnelle du RCAIP

Insérer x dans (α, β) peut créer les circuits suivants ($a \in \alpha$, $b \in \beta$).

Circuits élémentaires induits par le flot



Theorem

L'insertion de x dans (α, β) est possible si et seulement si $\max(L_1, L_2, L_3) \leq 0$ *avec* $L_1 = \max_{a \in \alpha}(p_a + \delta^v_{xa})$, $L_2 = \max_{b \in \beta}(p_x + \delta^v_{bx})$, $L_3 = \max_{(a,b) \in \alpha \times \beta}(p_a + p_x + \delta^v_{ba})$.

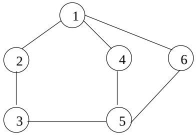
Complexité du problème

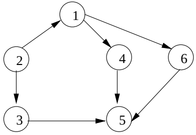
Theorem

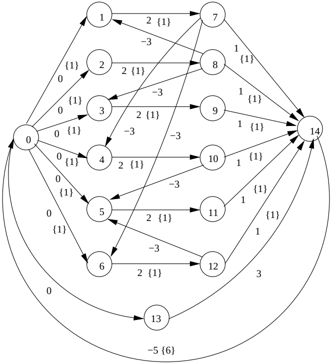
Le RCAIP est NP difficile

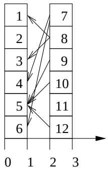
Preuve

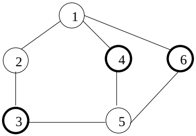
- Réduction du problème de stable.

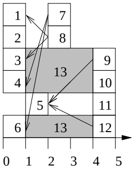

1
2
3
4
5
6


1
2
3
4
5
6


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
2 {1}
−3
−5 {6}


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
0 1 2 3

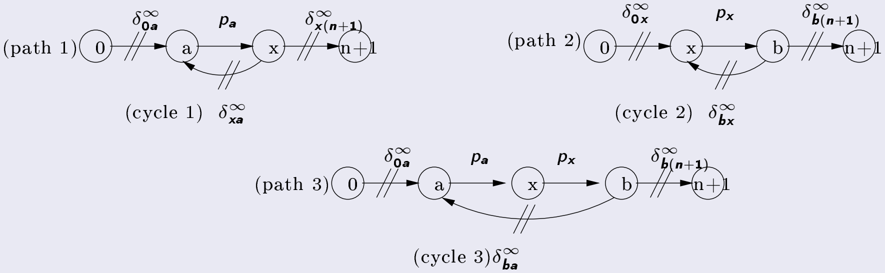

1
2
3
4
5
6


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
13
0 1 2 3 4 5

RCPSP avec écarts l_{ij} positifs (variante d'optimisation)

Ciscuits créés par l'insertion et plus longs chemins $0, n+1$

On considère la matrice des distances δ_{ij}^{∞}, $a \in \alpha$, $b \in \beta$



L'expression des plus longs chemins $0, n+1$ permet de définir des relations de dominance entre positions d'insertion.

Un algorithme d'insertion polynomial

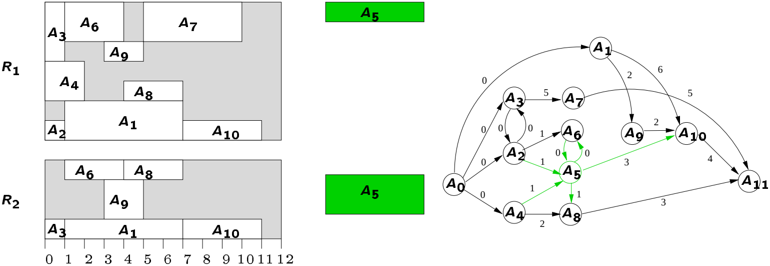
Définitions

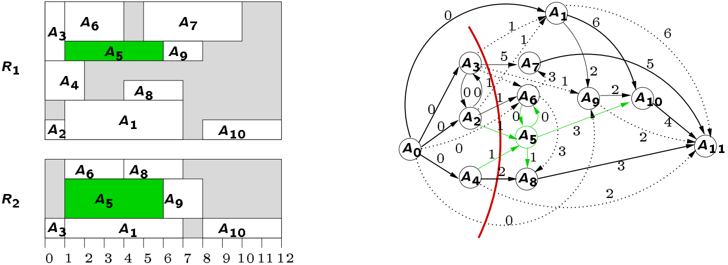
- $\gamma_0 = \{i \in A | \delta^\infty_{ix} = 0 \text{ et } \delta^\infty_{xi} = 0\}$ est l'ensemble des activités synchronisées with x.
- $\alpha_0 = \{i \in V \setminus \gamma_0 | \delta^\infty_{ix} \geq 0\}$
- $\beta_0 = V \setminus (\gamma_0 \cup \alpha_0)$
- $\mu(\alpha, \beta) = \{i \in \alpha | \delta^\infty_{0i} + p_i = \max_{A_a \in \alpha}(\delta^\infty_{0a} + p_a)\}$
- $\nu(\alpha, \beta) = \{i \in \beta | \delta^\infty_{i(n+1)} = \max_{b \in \beta}(\delta^\infty_{b(n+1)})\}$
- $\nu'(\alpha, \beta) = \{i \in \nu | \delta^\infty_{xi} = -\infty\}$

Algorithme $O(n^2 m)$

- Coupe initiale $(\alpha, \beta) \leftarrow (\alpha_0, \beta_0)$
- Tant qu'il reste assez de capacité dans (α, β) faire évaluer récursivement les coues partielles obtenues en enlevant μ d'α puis passer à la coupe suivante $(\alpha, \beta) \leftarrow (\alpha \cup \nu', \beta \setminus \nu)$.

Exemple de RCPSP avec écarts minimaux seulement





Conclusion

- L'insertion d'une seule activité est difficile en se basant sur le modèle de flot
- Peut-on trouver un schéma d'insertion polynomial pour le RCPSP/max ?
- Utilisser l'algorithme polynomial pour les écarts minimaux comme une heuristique ?

C. Artigues and F. Roubellat, A polynomial activity insertion algorithm in a multi-resource schedule with cumulative constraints and multiple modes, European Journal of Operational Research 127 (2000)

C. Artigues, P. Michelon and S. Reusser, Insertion techniques for static and dynamic resource-constrained project scheduling, European Journal of Operational Research 149 (2003)

C. Artigues, C. Briand, The resource-constrained activity insertion problem with minimum and maximum time lags, LAAS report, 2007