9ème congrès de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision

25, 26 & 27 Février 2008 - CLERMONT-FERRAND

Conditions de Dominance pour le Problème à une Machine avec Minimisation des Travaux en Retard

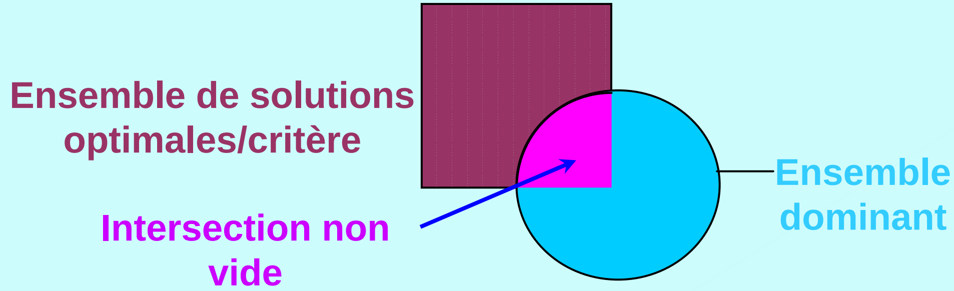
S. Ourari[1,2] ***et C. Briand[1]***

(sourari@laas.fr)

(1) Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS
(2) Centre de Développement des Technologies Avancées

Introduction

- **Principes**



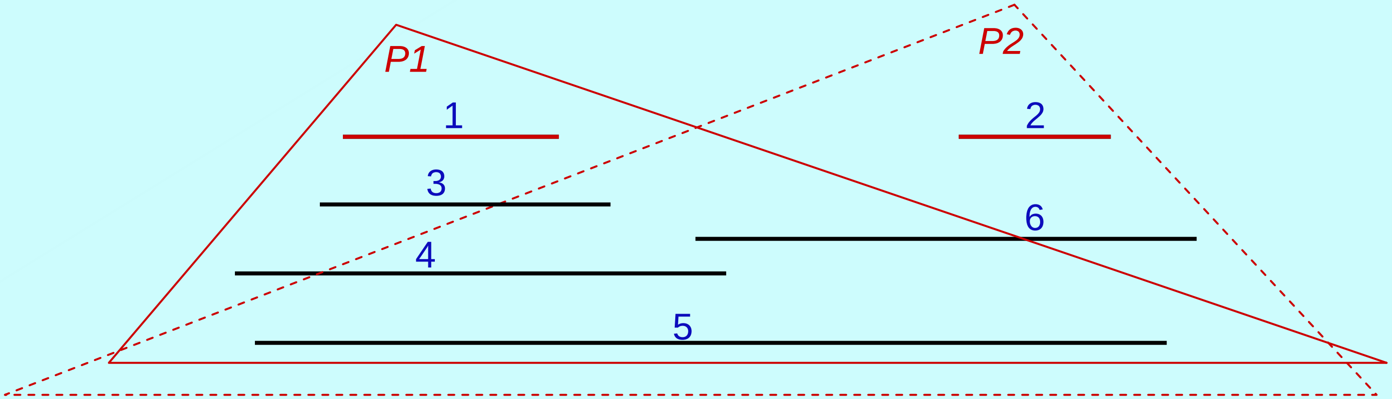
- **Avantages**
  - Dominance => caractérisation de solutions "plus admissibles" ou "plus optimales" que les autres
  - CH restreint =>
    - Les paramètres du problème ne sont pas connus précisément
    - insensibilité aux variations de paramètres
- **Motivations**
  - Caractériser un ensemble de solutions de cardinalité connue
- **Focalisation sur le problème à une machine**

Utilisation de conditions de dominance

- **Un théorème de dominance (*Erschler et al., 1983*)**
  - Fondements
    - *Problème 1 machine avec* r_i *(date de disponibilité) et* d_i *(échéance)*
    - *Corps d'hypothèses : <u>Ordre relatif</u> des* r_i *et* d_i, *<u>durées quelconques</u>*
    - *Un intervalle pour chaque travail :* $i \rightarrow [r_i, d_i]$
    - *Un problème ➔ Une structure d'intervalles*
    - *Fondé sur les notions de sommet et de S-pyramide*
  - Exemple

CH Restreint :

$r_4<r_5<r_3<r_1<d_1<d_3<r_6<d_4<r_2<d_2<d_5<d_6$



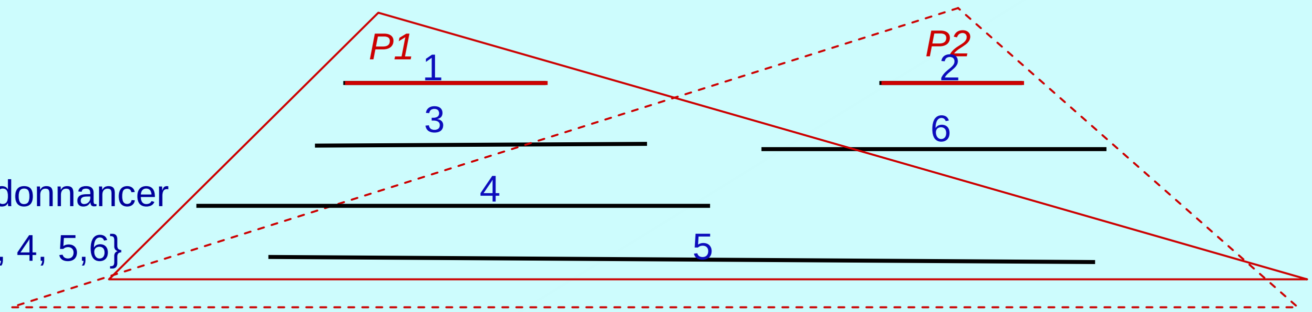
Théorème des pyramides

- Cardinalité de l'ensemble dominant

$$Card\ (S) = \prod_{q=1}^{q=N} (q+1)^{n_q}$$

n_q est le nombre de travaux appartenant exactement à q pyramides

- **Exemple**



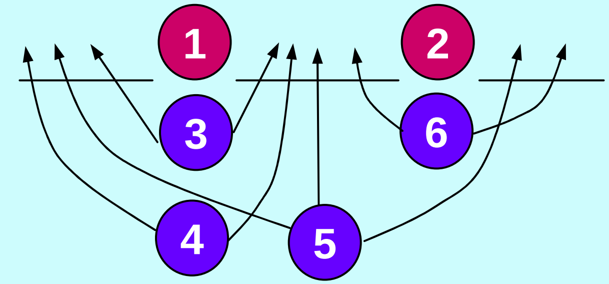
➢ 6 tâches à ordonnancer

P = {1, 2, 3, 4, 5,6}

➢ Nombre de pyramides : N = 2

- q = 1 : n_1 = 3 (travail 3,4 et 6)
- q = 2 : n_2 = 1 (travail 5)

➔ $Card(S) = (1+1)^3(2+1)^1 = 24$



24 séquences dominantes (parmi les 6!=720 seq. possibles)

$4 \prec 5 \prec 3 \prec 1 \prec 6 \prec 2$	$4 \prec 3 \prec 1 \prec 6 \prec 2 \prec 5$	$5 \prec 3 \prec 1 \prec 4 \prec 6 \prec 2$	$3 \prec 1 \prec 4 \prec 6 \prec 2 \prec 5$
$4 \prec 5 \prec 3 \prec 1 \prec 2 \prec 6$	$4 \prec 3 \prec 1 \prec 2 \prec 5 \prec 6$	$5 \prec 3 \prec 1 \prec 4 \prec 2 \prec 6$	$3 \prec 1 \prec 4 \prec 2 \prec 5 \prec 6$
$4 \prec 5 \prec 1 \prec 3 \prec 6 \prec 2$	$4 \prec 1 \prec 3 \prec 5 \prec 6 \prec 2$	$5 \prec 1 \prec 3 \prec 4 \prec 6 \prec 2$	$1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 2$
$4 \prec 5 \prec 1 \prec 3 \prec 2 \prec 6$	$4 \prec 1 \prec 3 \prec 5 \prec 2 \prec 6$	$5 \prec 1 \prec 3 \prec 4 \prec 2 \prec 6$	$1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 2 \prec 6$
$4 \prec 3 \prec 1 \prec 5 \prec 6 \prec 2$	$4 \prec 1 \prec 3 \prec 6 \prec 2 \prec 5$	$3 \prec 1 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 2$	$1 \prec 3 \prec 4 \prec 6 \prec 2 \prec 5$
$4 \prec 3 \prec 1 \prec 5 \prec 2 \prec 6$	$4 \prec 1 \prec 3 \prec 2 \prec 5 \prec 6$	$3 \prec 1 \prec 4 \prec 5 \prec 2 \prec 6$	$1 \prec 3 \prec 4 \prec 2 \prec 5 \prec 6$

Théorème des pyramides

Ordre partiel dominant relativement à

- l'admissibilité (*Erschler et al., 1983)*
- *Le plus grand retard vrai, Tmax* (*Erschler et al., 1985)*
- Le plus grand retard algébrique, *Lmax* (Briand *et al.*, 2003)

Notre objectif

Généraliser la condition de dominance d'Erschler *et al.* au problème de minimisation du nombre de travaux en retard: $1|r_i|\sum U_i$

$U_i = 1$ si le travail *i* est achevé après sa date échue

Plan

- Extension de la condition de dominance
  - Définition de la notion de séquence maître-pyramide
  - Relation entre séquence maître et ordres totaux
  - Nouvelle condition de dominance
- Utilisation de conditions de dominance pour le problème de minimisation du nombre de travaux en retard
- Conclusion et Perspective

Extensions:
Définition d'une séquence *maître-Pyramide: SMP*

- Pour éviter d 'énumérer toutes les séquences dominantes:
  - Séquence Maître-Pyramide

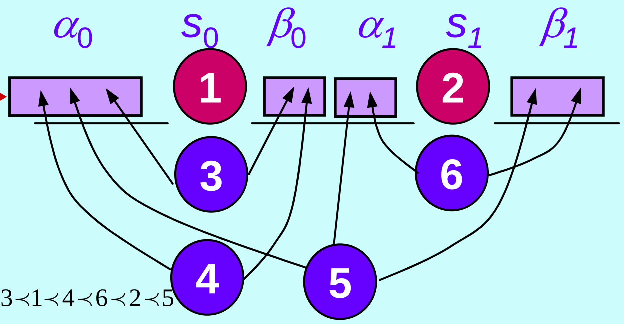
$$\sigma_\Delta = (\alpha_0\, s_0\, \beta_0\ \alpha_1\, s_1\, \beta \ldots\ \alpha_i\, s_i\, \beta_i \ldots \alpha_m\, s_m\, \beta_m)$$

  - m est le nombre total de sommets ;
  - α_i est l'ensemble des travaux appartenant à P_i et n'appartenant P_{i-1} classés $r_i\uparrow$
  - β_i est l'ensemble des travaux appartenant P_i classés d_i

- Exemple

$$r_4<r_5<r_3<r_1<d_1<d_3<r_6<d_4<r_2<d_2<d_5<d_6$$

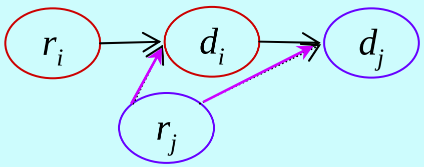
σ_Δ= (4,5,3,1,3,4,5,6,2,5,6)



4≺5≺3≺1≺6≺2	4≺3≺1≺6≺2≺5	5≺3≺1≺4≺6≺2	3≺1≺4≺6≺2≺5
4≺5≺3≺1≺2≺6	4≺3≺1≺2≺5≺6	5≺3≺1≺4≺2≺6	3≺1≺4≺2≺5≺6
4≺5≺1≺3≺6≺2	4≺1≺3≺5≺6≺2	5≺1≺3≺4≺6≺2	1≺3≺4≺5≺6≺2
4≺5≺1≺3≺2≺6	4≺1≺3≺5≺2≺6	5≺1≺3≺4≺2≺6	1≺3≺4≺5≺2≺6
4≺3≺1≺5≺6≺2	4≺1≺3≺6≺2≺5	3≺1≺4≺5≺6≺2	1≺3≺4≺6≺2≺5
4≺3≺1≺5≺2≺6	4≺1≺3≺2≺5≺6	3≺1≺4≺5≺2≺6	1≺3≺4≺2≺5≺6

Extensions:
Relation entre séquence maître et ordres totaux

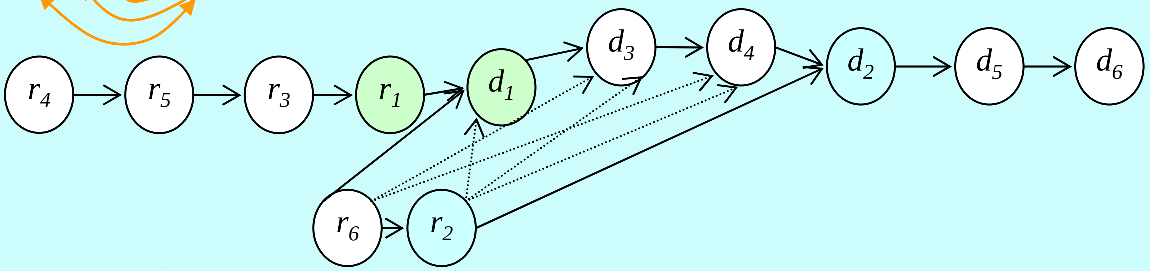
– **Propriété**. Si deux jobs *i* et *j* sont tel que *i précède dans tous les cas j* dans la séquence maître pyramide alors l'ordre total relatif à *i* et *j* est soit $r_i<d_i\leq r_j< d_j$ ou bien $r_i<r_j\leq d_i<d_j$



- Exemple

$r_4<r_5<r_3<r_1<d_1<d_3<r_6<d_4<r_2<d_2<d_5<d_6$

σ_Δ= (4,5,3,<u>1</u>,3,4,5,6,<u>2</u>,5,6)

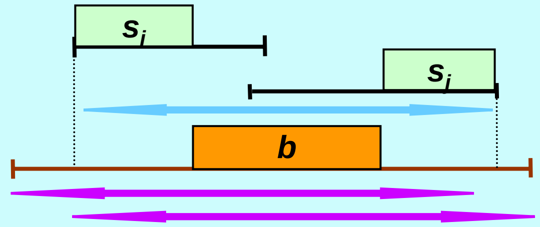


Ensemble des ordres totaux compatibles avec σ_Δ

$r_4<r_5<r_3<r_1<r_6<r_2<d_1<d_3<d_4<d_2<d_5<d_6$	$r_4<r_5<r_3<r_1<d_1<r_6<d_3<r_2<d_4<d_2<d_5<d_6$
$r_4<r_5<r_3<r_1<r_6<d_1<r_2<d_3<d_4<d_2<d_5<d_6$	$r_4<r_5<r_3<r_1<d_1<r_6<d_3<d_4<r_2<d_2<d_5<d_6$
$r_4<r_5<r_3<r_1<r_6<d_1<d_3<r_2<d_4<d_2<d_5<d_6$	$r_4<r_5<r_3<r_1<d_1<d_3<r_6<r_2<d_4<d_2<d_5<d_6$
$r_4<r_5<r_3<r_1<r_6<d_1<d_3<d_4<r_2<d_2<d_5<d_6$	<u>$r_4<r_5<r_3<r_1<d_1<d_3<r_6<d_4<r_2<d_2<d_5<d_6$</u>
$r_4<r_5<r_3<r_1<d_1<r_6<r_2<d_3<d_4<d_2<d_5<d_6$	$r_4<r_5<r_3<r_1<d_1<d_3<d_4<r_6<r_2<d_2<d_5<d_6$

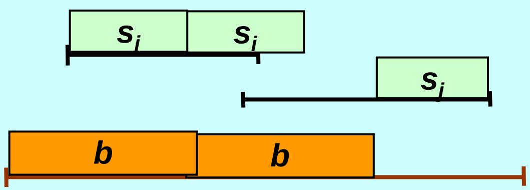
Extensions:
Nouvelles conditions de dominance (1)

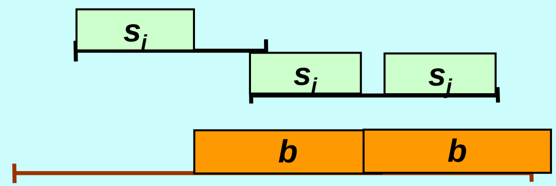
- Deux sommets avec une base commune



$\sigma_\Delta = (b\ \underline{\mathbf{s_i}}\ \underline{b}\ \underline{\mathbf{s_j}}\ \mathbf{b})$

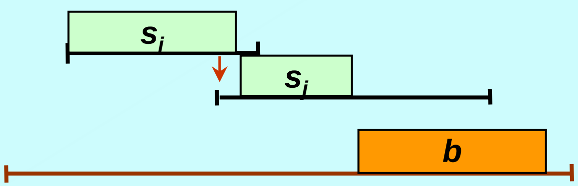
- Question: Est ce que (s_i,b,s_j) est dominée par (s_i,s_j,b) ou bien (b,s_i,s_j)



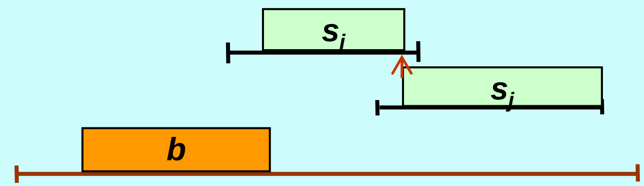


- Vrai si:

$r_i+p_i \geq r_j$

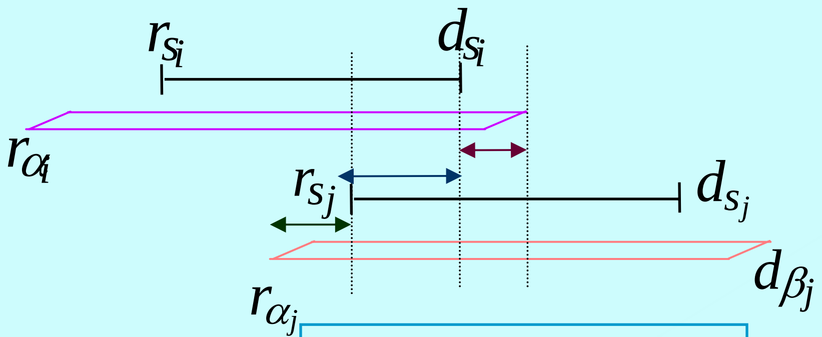


$d_j-p_j \leq d_i$



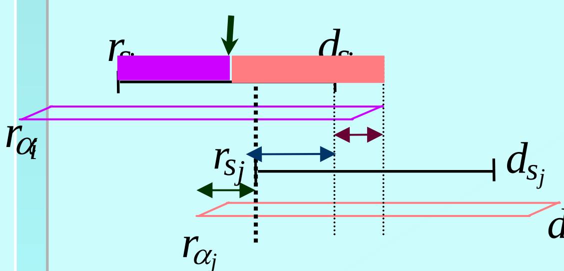
Extensions:
Nouvelles conditions de dominance (2)

- Deux sommets (s_i,s_j) sans bases communes/ *Overlaps* (s_i,s_j)

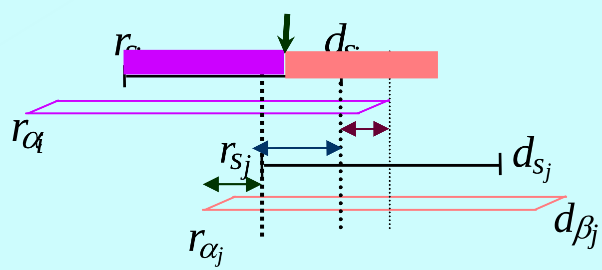


$$\sigma_\Delta = (\alpha_i\ s_i\ \beta_i\ \alpha_j\ s_j\ \beta_j)$$

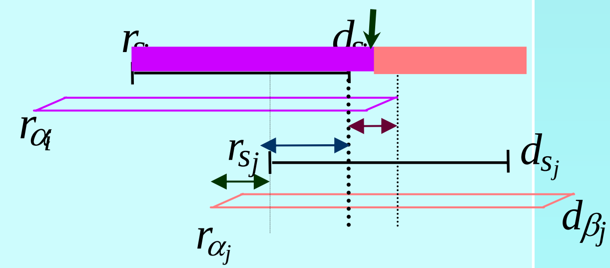
- Question: Est ce que ($s_i\ \beta_i\ \alpha_j\ s_j$) est dominée par une autre séquence incluse dans σ_Δ?



($\alpha_i\ s_i\ \alpha_j\ s_j$)



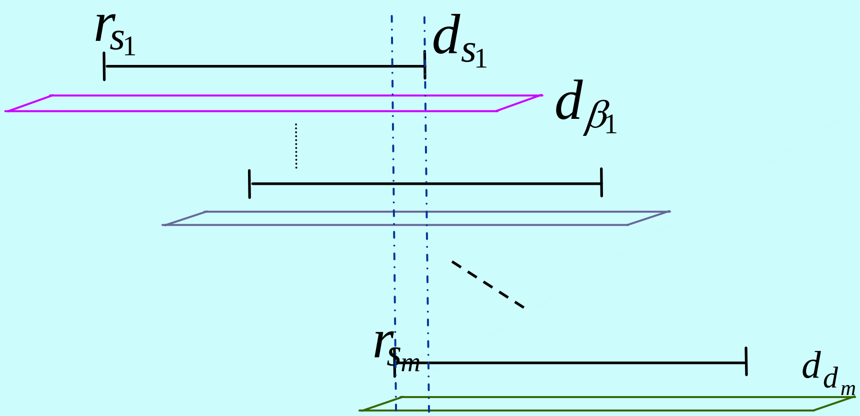
($\alpha_i\ s_i\ s_j\ \beta_j$)



($s_i\ \beta_i\ s_j\ \beta_j$)

Extensions:
Nouvelles conditions de dominance (2)

- m sommets sans bases communes/ m>2 et *Overlaps* (s_1, s_m)



$$\sigma_\Delta = (\alpha_1\ s_1\ \beta_1\ \ldots\ \alpha_i\ s_i\ \beta_i\ \ldots\ \alpha_m\ s_m\ \beta_m)$$

Toute séquence dominante qui placerait des jobs entre deux sommets est dominée par une autres séquence incluse dans σ_Δ

Plan

- Introduction
- Extension de la condition de dominance
  - Définition de la notion de séquence maître-pyramide
  - Relation entre séquence maître et ordres totaux
  - Nouvelle condition de dominance
- Utilisation de conditions de dominance pour le problème de minimisation du nombre de travaux en retard
- Conclusion et Perspectives

Utilisation de conditions de dominance pour le problème de minimisation du nombre de travaux en retard

- Trouver une solution optimale au problème *de minimisation du nombre de travaux en retard* consiste à déterminer une séquence admissible pour <u>une sélection de travaux E*⊂V la plus grande possible</u>

Corollaire 1. L'union de toutes les séquences dominantes que le théorème des pyramides caractérise pour toute sélection de travaux est dominante vis-à-vis du critère.

Pour un problème à *n* tâches: $\sum_{k=1\cdots n} A_n^k$ sélections

Détermination des séquences maître-pyramide

La *SMP* caractérise un S_{dom} pour un ensemble important de sélections

$\Updownarrow$

Déterminer toutes les séquences maîtres non compatibles entre elles

Un ensemble V de jobs	Un sous ensemble $V' \subset V$
$\updownarrow$	$\updownarrow$
σ_Δ: SMP de V	σ'_Δ: SMP de V

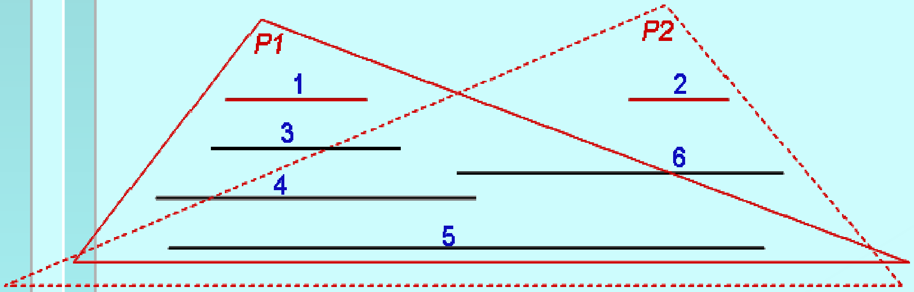
$\Leftrightarrow$

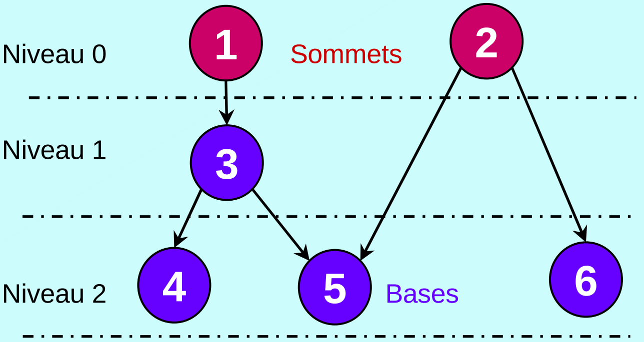
Compatibilité

Le graphe d'intervalles sommets-bases

<u>Problème à une machine avec fenêtres d’exécutions.</u>

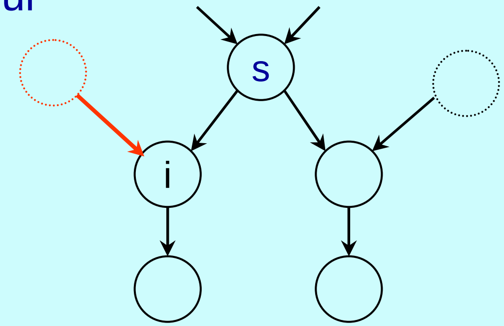
Un graphe d'intervalles sommet-base





Le graphe d'intervalles sommet-base

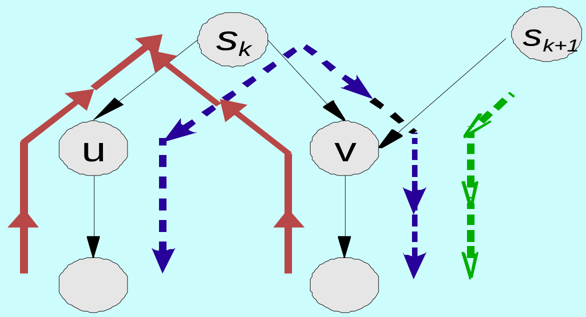
s: sommet générateur



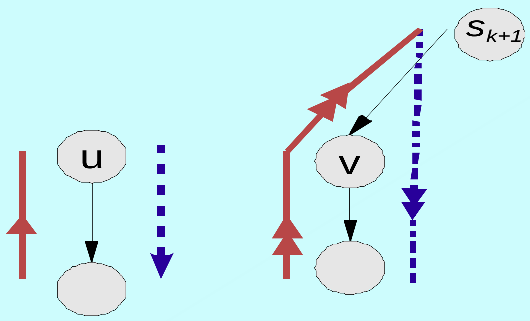
s: sommet non générateur

Détermination des séquences maître-pyramide non compatibles entre elles

Une sélection sans sommet générateur



Selection with a generator top



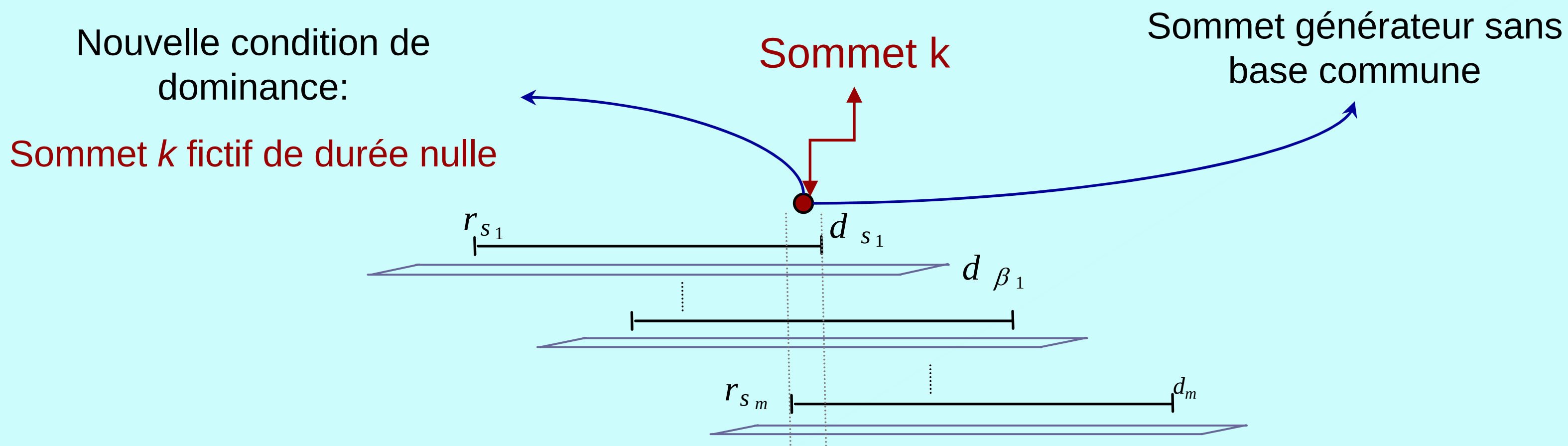
Selection without a generator top

$$\sigma_\Delta = (\alpha_0 s_0 \cdots \alpha_u u \alpha_v v s_k u \beta_u v \beta_v s_{k+1} \cdots \beta_m) \qquad \sigma'_\Delta = (\alpha_0 s_0 \cdots \alpha_u u \beta_u \alpha_v v s_{k+1} \cdots \beta_m)$$

σ'_Δ non compatible avec σ_Δ

Détermination des séquences maître-pyramide non compatibles entre elles

Le sommet est générateur sans base commune



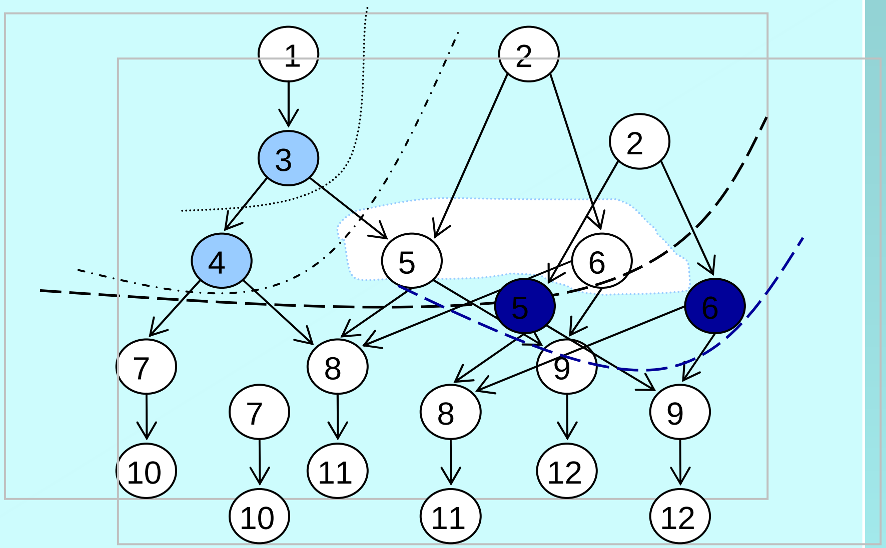
σ'_Δ dominée par σ_Δ

- Pour énumérer toutes les séquences maître-pyramides non compatibles:
  - Éliminer tour à tour dans le graphe sommet-base, *les nœuds* (ensembles de nœuds) *générateurs avec bases communes et leur ascendance*, puis
  - construire la séquence maître pyramide pour le graphe (sous problème) restant.

Détermination des séquences maître-pyramide

- **Exemple**

V={1,2,…,12} ,
S_G= {3,4},
S_p ={2,5,6}



- V=*{1,2,…,12} ,*

$\sigma_\Delta^{(1)}$= *(*10,7,11,8,4,12,9,5,3,**1**,3,4,7,10,8,11,5,9,12,6, **2**,5,8,11,6,9,12*);*

- V\ {3,1}: ***3 est un sommet générateur avec base commune (job 8)***

$\sigma_\Delta^{(2)}$= (*10,7,11,8,**4**,7,10,8,11,12,9,5,6, **2**,5,8,11,6,9,12*)**;** *$\sigma_\Delta^{(2)}$ incompatible avec $\sigma_\Delta^{(1)}$*

- V\ {4,3,1}: ***4 est un sommet générateur, sans base commune***

$\sigma_\Delta^{(3)}$ = *(10,7,10,11,8,12,9,5,6, **2**,5,8,11,6,9,12); $\sigma_\Delta^{(3)}$ dominée par $\sigma_\Delta^{(2)}$*

Détermination des séquences maître-pyramide

Exemple:

σ_{Δ}: *SMP de V={0,1,…,12}*

Solution optimale

12, 9, 5, 3, 1, 3, 4, 7, 10, 8, 11, 5, 9, 12, 6, 2, 5, 8, 11, 6, 9, 12

0 ou 1 job en retard

10, 7, 11, 8, 4

1,3 absents

7, 10, 8, 11, 12, 9, 5, 6, 2, 5, 8, 11, 6, 9, 12

Plus de 2 jobs
en retard

σ'_{Δ}: *SMP de V\{1,3}*

Conclusion-Perspective

- Généraliser le théorème de dominance pour la minimisation du nombre de tâches en retards:
  - Définition d'une Séquence maître-pyramide pour la caractérisation de toutes les séquences dominantes.
  - Nouvelles conditions de dominance
  - Définition d'un graphe d'intervalles sommet-base, et sommets et ensemble générateurs
- Sous l'hypothèse qu'il n'existe aucun sommet ou ensemble de sommets générateurs avec bases communes:
  - Le théorème des pyramides est dominant vis-à-vis du problème de minimisation du nombre de travaux en retard.
- Cas général
  - Un ensemble de séquences dominantes pour le problème peut ainsi être caractérisé par énumération de plusieurs séquences maîtres-pyramides.

Perspective:

Concevoir des méthodes exactes de résolution du problème plus efficaces que celles existantes.

Merci de votre attention!

?