# Partitionnement d'un graphe orienté acyclique par la génération de colonnes

**H. Murat AFSAR**

Murat.Afsar@laas.fr

**LAAS-CNRS**
**Université de Toulouse**

## Définition du problème

## Génération de colonnes

## Expérimentations

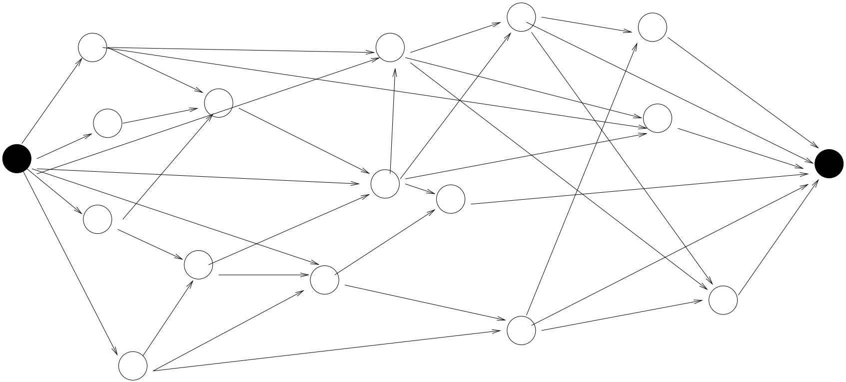
# Partitionnement de graphe

- $G(V, A)$ acyclique et sommet-pondéré
- $k$ chemins sommet-disjoints
- Chemins équilibrées en poids total

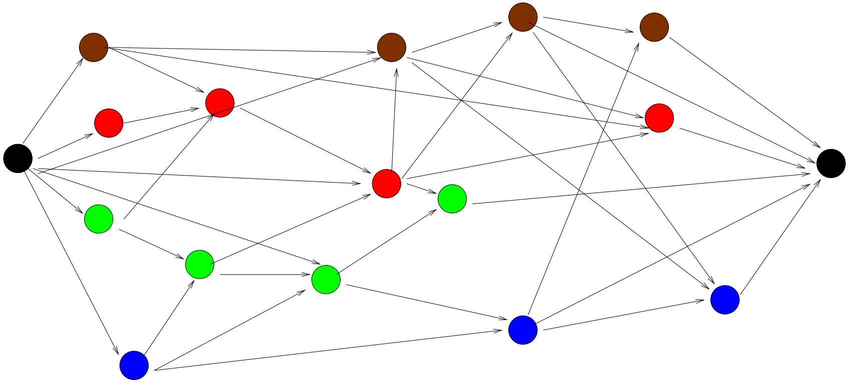
# Partitionnement de graphe

- $G(V, A)$ acyclique et sommet-pondéré
- $k$ chemins sommet-disjoints
- Chemins équilibrées en poids total
- NP-Complet : réduction au problème de partition

# Graphe des connexions



# Graphe des connexions



Définition du problème

Génération de colonnes

Expérimentations

# Fonction objectif quadratique

- $\min \sum_{p} \frac{(M - D_p)^2}{M}$

  Où

- $M = \frac{\sum_{v \in V} d_v}{k}$ Poids idéal
- $D_p = \sum_{v \in p} d_v$ Poids du chemin $p$

# Décomposition du problème

# Décomposition du problème

- Problème maitre $\longrightarrow$ couverture des sommets par des chemins
  - Un et un seul chemin par sommet

# Décomposition du problème

- Problème maitre $\longrightarrow$ couverture des sommets par des chemins
  - Un et un seul chemin par sommet
- Sous-problème $\longrightarrow$ construction des chemins réalisables
  - Coût quadratique ! ! !

# Problème maître restreint

$$\min \sum_{p \in P'} c_p \lambda_p$$

s.q.

$$\pi_0 \longrightarrow \sum_{p \in P'} \lambda_p = k$$

$$\pi_v \longrightarrow \sum_{p \in P' | v \in p} \lambda_p = 1 \qquad \forall v \in V$$

$$\lambda_p \geq 0 \qquad \forall p \in P'$$

# Dual du PMR

$$\max \sum_{v \in V} \pi_v + k \times \pi_0$$

s.q.

$$\pi_0 + \sum_{v \in p} \pi_v \leq c_p \qquad \forall p \in P$$

où

$$c_p = g(D_p) = \frac{(M - D_p)^2}{M} = \frac{(M - \sum_{v \in p} d_v)^2}{M}$$

# Coût réduit

- $\bar{c}_p = c_p - \sum_{v \in p} \pi_v - \pi_0$

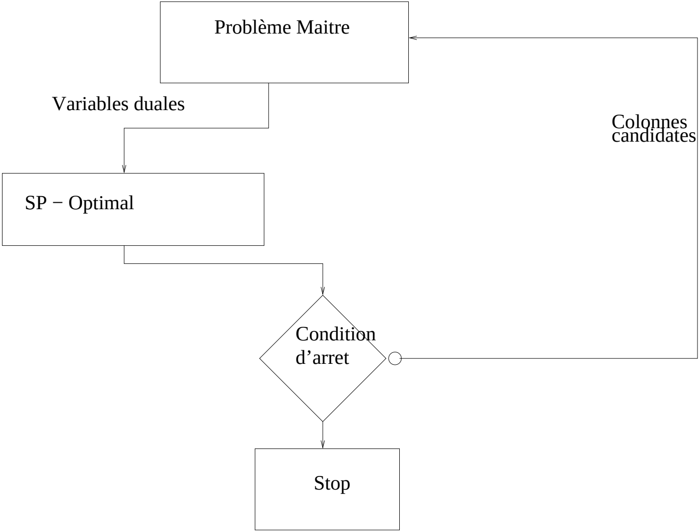
# Coût réduit

- $\bar{c}_p = c_p - \sum_{v \in p} \pi_v - \pi_0$
- $\bar{c}_p \geq 0 \Rightarrow$ Dual réalisable $\Rightarrow$ Solution optimale

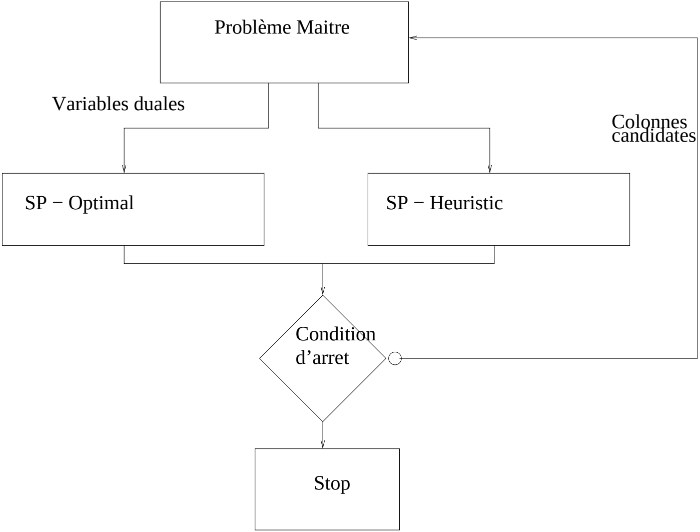
# Coût réduit

- $\bar{c}_p = c_p - \sum_{v \in p} \pi_v - \pi_0$
- $\bar{c}_p \geq 0 \Rightarrow$ Dual réalisable $\Rightarrow$ Solution optimale
- On cherche un chemin $p$ avec $\bar{c}_p < 0$

# Schèma de la génération de colonnes



# Schèma de la génération de colonnes



# Sous-problème : Méthode optimale

- Programmation dynamique

$$f(v, D) = \pi_v + \max_{v' \in \delta^-(v)} f(v', D - d_v)$$

- $\bar{c}^* = \min_{p \in P} \bar{c} = \min_{p \in P} \{g(D) - f(t, D)\}$ où $D$ est le poids du chemin $p$ et $t$ est le puit

# Règles de dominance

- $D_p = D_{p'} \wedge \sum_{v \in p} \pi_v \leq \sum_{v \in p'} \pi_v \quad \Rightarrow \quad p \prec p'$

# Règles de dominance

- $D_p = D_{p'} \wedge \sum_{v \in p} \pi_v \leq \sum_{v \in p'} \pi_v \quad \Rightarrow \quad p \prec p'$
- $D_p \geq D_{p'} \geq M \wedge \sum_{v \in p} \pi_v \leq \sum_{v \in p'} \pi_v \quad \Rightarrow \quad p \prec p'$

# Sous-problème : Méthode heuristique

- Heuristic primal : Flot max - coût max
  - $cout(a) = \sum_{p|a \in p} \lambda_p$

# Sous-problème : Méthode heuristique

- Heuristic primal : Flot max - coût max
  - $cout(a) = \sum_{p|a \in p} \lambda_p$
- Amélioration duale : 2-OPT entre $p$ et $p'$ pour minimiser les coûts réduits

# Relaxation lagrangienne

$$\min \theta(\pi) = \min \sum_{p \in P} \lambda_p c_p + \sum_{v \in V} (\pi_v (1 - \sum_{p \in P | v \in p} \lambda_p))$$

s.q.

$$\sum_{p \in P} \lambda_p = k$$

# Relaxation lagrangienne

$$\theta_1^*(\pi) = k \times \min\{c_p - \sum_{v|v \in p} \pi_v\} + \sum_{v \in V} \pi_v$$

# Relaxation lagrangienne

$$\theta_1^*(\pi) = k \times \min\{c_p - \sum_{v|v \in p} \pi_v\} + \sum_{v \in V} \pi_v$$

$$\theta_2^*(\pi) = \sum_{p \in \kappa} (c_p - \sum_{v|v \in p} \pi_v) + \sum_{v \in V} \pi_v$$

où $\kappa$ est l'ensemble des chemins $p$ ayant $k$ minimum coût réduit et se terminant sur un différent sommet

# Relaxation lagrangienne

$$\theta_1^*(\pi) = k \times \min\{c_p - \sum_{v|v\in p} \pi_v\} + \sum_{v\in V} \pi_v$$

$$\theta_2^*(\pi) = \sum_{p\in\kappa}(c_p - \sum_{v|v\in p} \pi_v) + \sum_{v\in V} \pi_v$$

où $\kappa$ est l'ensemble des chemins $p$ ayant $k$ minimum coût réduit et se terminant sur un différent sommet

$$\theta_2(\pi) \geq \theta_1(\pi)$$

Définition du problème

Génération de colonnes

Expérimentations

# Résultats numériques

| Instance | iter | $Z^*_{LP}$ | GLB | GUB | Columns |
|---|---|---|---|---|---|
| A_0.05 | 95 | 0,141 | 0,141 | 10,996 | 9649 |
| A_0.10 | 18 | 0,141 | 0,141 | 7,282 | 4913 |
| A_0.15 | 11 | 0,141 | 0,141 | 3,283 | 3216 |
| A_0.20 | 7 | 0,141 | 0,141 | 0,712 | 1918 |
| A_0.25 | 6 | 0,141 | 0,141 | 0,427 | 1467 |
| B_0.05 | 34 | 1,714 | 1,714 | 1,714 | 4648 |
| B_0.10 | 6 | 1,714 | 1,714 | 1,714 | 1484 |
| B_0.15 | 6 | 1,714 | 1,714 | 1,714 | 1586 |
| B_0.20 | 6 | 1,714 | 1,714 | 1,714 | 1552 |
| B_0.25 | 5 | 1,714 | 1,714 | 1,714 | 1217 |
| F_40_80 | 6 | 2,945 | 2,945 | 2,945 | 1639 |
| F_40_100 | 6 | 2,624 | 2,624 | 2,624 | 1839 |
| F_40_120 | 5 | 2,689 | 2,689 | 2,689 | 1195 |
| F_40_150 | 5 | 2,120 | 2,120 | 2,120 | 1064 |
| F_40_240 | 5 | 1,946 | 1,946 | 1,946 | 1102 |

# Durées d'exécution (en sec.)

| Instance | Total | Master | Slave | Flow | 2OPT |
|---|---|---|---|---|---|
| A_0.05 | 473 | 265 | 56 | 8 | 133 |
| A_0.10 | 153 | 27 | 19 | 9 | 85 |
| A_0.15 | 176 | 24 | 13 | 4 | 109 |
| A_0.20 | 161 | 13 | 10 | 5 | 96 |
| A_0.25 | 161 | 8 | 9 | 3 | 91 |
| B_0.05 | 63 | 15 | 1 | 2 | 45 |
| B_0.10 | 53 | 5 | 0 | 2 | 46 |
| B_0.15 | 152 | 5 | 0 | 3 | 143 |
| B_0.20 | 184 | 5 | 3 | 4 | 170 |
| B_0.25 | 172 | 2 | 0 | 5 | 162 |
| F_40_80 | 210 | 9 | 0 | 2 | 199 |
| F_40_100 | 253 | 8 | 1 | 1 | 242 |
| F_40_120 | 262 | 4 | 2 | 1 | 255 |
| F_40_150 | 169 | 2 | 2 | 4 | 160 |
| F_40_240 | 290 | 2 | 2 | 3 | 282 |

# Maintenant : collecte des déchets

# Partitionnement d'un graphe orienté acyclique par la génération de colonnes

**H. Murat AFSAR**

Murat.Afsar@laas.fr

**LAAS-CNRS**
**Université de Toulouse**