Formulations PLNE basées sur les événements pour le RCPSP

Oumar Koné
Christian Artigues
Pierre Lopez
(LAAS-CNRS, Université de Toulouse)

Marcel Mongeau
(Institut de Mathématiques, Université de Toulouse)

11 février 09 --- okone@laas.fr –-- av. du colonel Roche, 31077 cedex 4 Toulouse

PLAN DE LA PRESENTATION

- **Définition du problème**

- Formulation PLNE pour le RCPSP:
  - Formulation basique à temps discret (DT)
  - Formulation désagrégée à temps discret (DDT)
  - Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT)

- Formulations PLNE basées sur les événements
  - Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)
  - Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

- Instances
  - Instances classiques
  - Nouvelles instances proposées

- Etude comparative

- Conclusions et perspectives

RCPSP : « Resource-Constrained Project Scheduling Problem »

Problème d'ordonnancement cumulatif
Grand nombre d'applications dans l'industrie.
Couvre un grand nombre de problèmes théoriques d'ordonnancement.

Méthodes de résolution

- Calculs de bornes inférieures;
- Méthodes de résolution exactes;
- Méthodes de résolution approchées.

Techniques utilisées

- Programmation Linéaire en Nombres Entiers;
- Programmation Par Contraintes;
- Branch and Bound;
- Relaxation Lagrangienne;
- Etc.

INSTITUT de MATHEMATIQUES de TOULOUSE

Activités: Ensemble d'activités : $A = \{1,\ldots,n\}$ & activités fictives 0 et $n+1$

Durée opératoire de chaque activité i : p_i.

Ensemble de précédences (E):

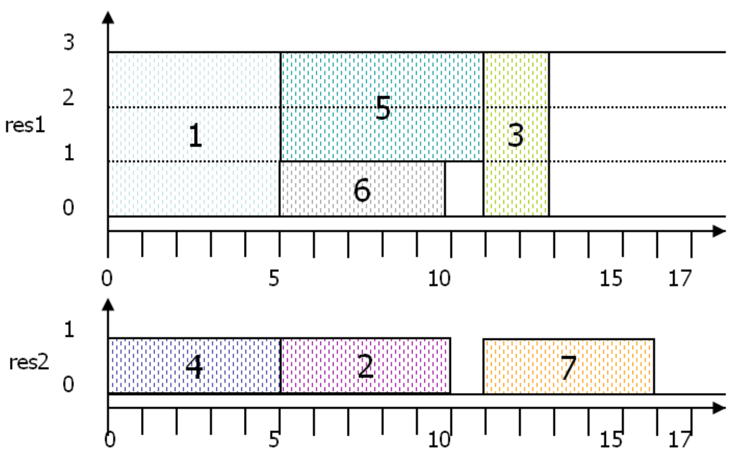
$(i, j) \in E$, avec i et $j \in A^2$ => l'activité i précède l'activité j.

Ressources

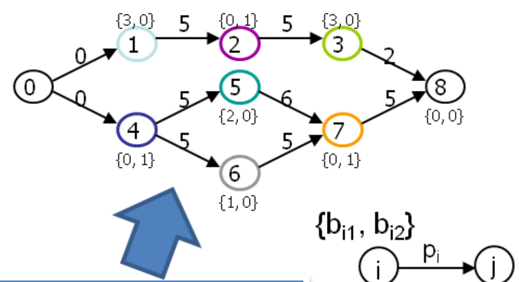
Ensemble de ressources: $R = \{1,\ldots, m\}$, de capacité R_k, (pour chaque ressource k).

Consommation de la ressource k par l'activité i : b_{ik}.

Objectif: Minimiser la durée totale du projet (C_{max}).



Un ordonnancement réalisable



Graphe de précédence

Diagramme de Gantt

Définition du problème

Formulation conceptuelle

- $H=\{0,\ldots,T\}$: Horizon d'ordonnancement du projet.

- Variables de décision
  S_i : date de début d'exécution de l'activité i, avec $S_0 = 0$.

- **minimiser** $C_{max} = S_{n+1}$
  Sous
  $C_{max} \geq S_i + p_i \qquad \forall i \in A \square \{0,n+1\}$
  $S_j \geq S_i + p_i \qquad \forall (i,j) \in E$ (Contraintes de précédences)
  $\Sigma_{i \in P(t)} b_{ik} \leq R_k \qquad \forall t \in H,\ k \in R$ (Contraintes de ressources)
  $S_i \geq 0 \qquad \forall i \in A \square \{0,n+1\}$

- Avec $P(t) = \{ i \mid S_i \leq t < S_i+p_i \}$ (difficilement identifiable)

- Le RCPSP est NP-difficile au sens fort

Pas de méthode exacte permettant de résoudre des problèmes de plus de 60 tâches.

INSTITUT de MATHEMATIQUES de TOULOUSE

PLAN DE LA PRESENTATION

- Définition du problème
- **Formulation PLNE pour le RCPSP**:
  - Formulation basique à temps discret (DT)
  - Formulation désagrégée à temps discret (DDT)
  - Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT)
- Formulations PLNE basées sur les événements
  - Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)
  - Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)
- Instances
  - Instances classiques
  - Nouvelles instances proposées
- Etude comparative
- Conclusions et perspectives

Formulation PLNE pour le RCPSP

Formulations utilisant des variables indexées par le temps

Variable binaire de décision : x_{it}.

$x_{it} = 1$ si l' activité i démarre à t sinon 0, pour tout $i \in A \cup \{0,n+1\}$ et pour tout $t \in H$.

Remarque : $S_i = \sum_t t x_{it}$

Formulation basique à temps discret (DT)

$$\min \sum_{t \in H} t x_{n+1,t}$$

$$\sum_{t \in H} t x_{jt} \geq \sum_{t \in H} t x_{it} + p_i \quad \forall (i,j) \in E$$

$$\sum_{i \in A} b_{ik} \sum_{\tau = t - p_i + 1}^{t} x_{i\tau} \leq B_k, \forall t \in H, \forall k \in R$$

$$\sum_{t \in H} x_{it} = 1, \forall i \in A \cup \{0, n+1\}$$

Formulation désagrégée à temps discret (DDT)

$$\min \sum_{t \in H} t x_{n+1,t}$$

$$\sum_{\tau = t}^{T} x_{i\tau} + \sum_{t=0}^{t+p_i-1} x_{jt} \leq 1, \forall t \in H, \forall (i,j) \in E$$

$$\sum_{i \in A} b_{ik} \sum_{\tau = t - p_i + 1}^{t} x_{i\tau} \leq B_k, \forall t \in H, \forall k \in R$$

$$\sum_{t \in H} x_{it} = 1, \forall i \in A \cup \{0, n+1\}$$

Formulation PLNE pour le RCPSP

Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT)

Variables séquentielles: x_{ij} activité *i* précède l'activité *j*

Variables continues: S_i date de début l'activité *i*

Gestion des contraintes de ressources par un modèle de flots (var. continues de flots f_{ijk})

$$\min S_{n+1}$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \qquad \forall (i,j) \in (A \cup \{0, n+1\})^2,\ i < j$$

$$xik \geq xij + xjk - 1 \qquad \forall (i,j,k) \in (A \cup \{0, n+1\})^3$$

C. de transitivités

$$x_{ij} = 1 \qquad \forall (i,j) \in E$$

$$S_j - S_i \geq -M + (p_i + M) x_{ij} \qquad \forall (i,j) \in (A \cup \{0, n+1\})^2$$

C. de précédences

$$f_{ijk} \leq \min(b_{ik}, b_{jk}) x_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \cup \{0\} \times A \cup \{n+1\}, \forall k \in R$$

$$\sum_{j \in A \cup \{0,n+1\}} f_{ijk} = \beta_{ik} \qquad \forall i \in A \cup \{0, n+1\}, \forall k \in R$$

$$\sum_{i \in A \cup \{0,n+1\}} f_{ijk} = \beta_{jk} \qquad \forall j \in A \cup \{0, n+1\}, \forall k \in R$$

$$f_{ijk} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in (A \cup \{0, n+1\})^2, \forall k \in R$$

$$f_{(n+1)0k} = B_k \qquad \forall k \in R$$

$$\beta_{ik} = b_{ik} \qquad \forall i \in A, \forall k \in R$$

$$\beta_{0k} = \beta_{n+1,k} \qquad \forall k \in R$$

C. de ressources

$$S_i \geq 0 \qquad \forall i \in A \cup \{0, n+1\}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in (A \cup \{0, n+1\})^2$$

11 février 09 --- okone@laas.fr --- av. du colonel Roche, 31077 cedex 4 Toulouse

PLAN DE LA PRESENTATION

- Définition du problème

- Formulation PLNE pour le RCPSP:
  - Formulation basique à temps discret (DT)
  - Formulation désagrégée à temps discret (DDT)
  - Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT)

- **Formulations PLNE basées sur les événements**
  - Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)
  - Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

- Instances
  - Instances classiques
  - Nouvelles instances proposées

- Etude comparative

- Conclusions et perspectives

INSTITUT de MATHEMATIQUES de TOULOUSE

Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)

Événement = début ou fin d'exécution d'une activité

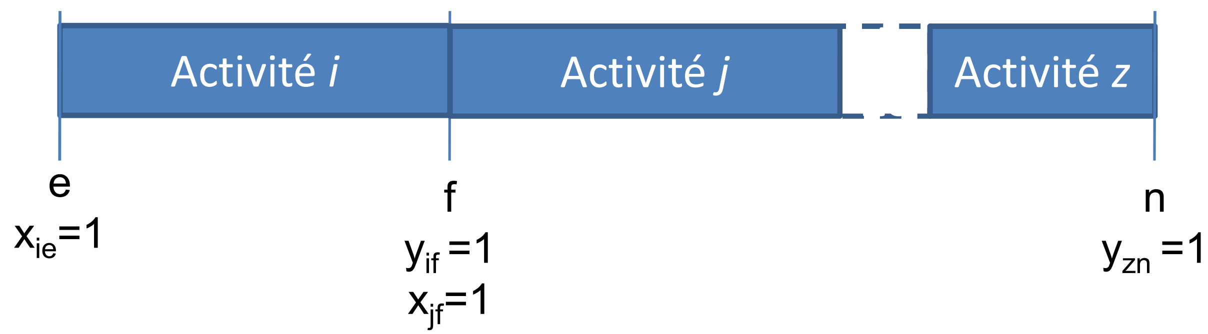
V={0,1,…,n} : Ensemble des événements

Nombre d'événements = nombre d'activités +1

Variables binaires indexées par des événements

x_{ie}: Var. binaire de début d'activité, x_{ie}=1 =>l'activité *i* débute à l'événement *e*

y_{ie}: Var. binaire de début d'activité, y_{ie}=1 =>l'activité *i* finit à l'événement *e*



Variables continues

t_e: date de l'événement *e*

r_{ie}: consommation totale de la ressource *k* l'événement *e*

Formulations PLNE basées sur les événements

Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)

$$\min t_n$$

$$t_0 = 0$$

$$t_f \geq t_e + p_i x_{ie} - p_i(1 - y_{if}) \qquad \forall (e,f) \in V^2, f > e, \forall i \in A$$

$$t_{e+1} \geq t_e \qquad \forall \in V, e < n$$

$$\sum_{e \in V} x_{ie} = 1 \qquad \forall i \in A$$

$$\sum_{e \in V} y_{ie} = 1 \qquad \forall i \in A$$

$$\sum_{e'=e}^{n} y_{ie'} + \sum_{e'=0}^{e-1} x_{je} \leq 1 \qquad \forall (i,j) \in E, \forall e \in V$$

$$r_{0k} = \sum_{i \in A} b_{ik} x_i \qquad \forall k \in R$$

$$r_{ek} = r_{(e-1)k} + \sum_{i \in A} b_{ik} x_{ie} - \sum_{i \in A} b_{ik} y_{ie} \qquad \forall e \in V, e \geq 1, \forall k \in R$$

$$r_{ek} = B_k \qquad \forall e \in V, \forall k \in R$$

$$x_{ie} \in \{0,1\}, y_{ie} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in A, \forall e \in V$$

$$t_e \geq 0 \qquad \forall e \in V$$

$$r_{ek} \geq 0 \qquad \forall e \in V, \forall k \in R$$

Voir résumé ROADEF 2008 :
« *Nouvelle formulation du problème d'ordonnancement de projet à moyens limités basée sur les événements* »

Formulations PLNE basées sur les événements

Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

Événement = début d'exécution d'une activité

$V=\{0,1,\ldots,n-1\}$: Ensemble des événements

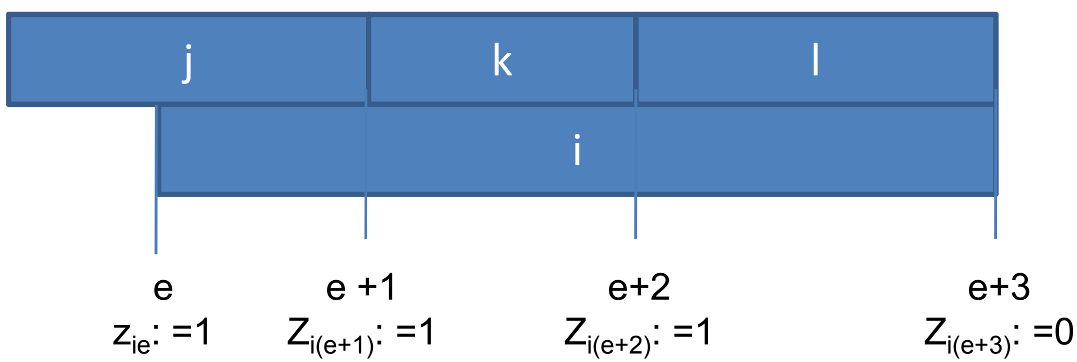
Nombre d'événements = nombre d'activités

Variables continues

t_e: date de l'événement *e*

Variables binaires indexées par des événements

z_{ie}: Var. binaire indiquant si l'activité *i* débute (ou est en cours) juste après l'événement *e*



Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

- 2 fois moins de variables binaires que SEE
- Représentation facile de la contrainte de ressources

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_{ik} z_{ie} \leq B_k \quad \forall e \in V, \forall k \in R$$

- Permet de traiter des instances comportant des durées non-entières (valable pour FCT,SEE)

  par exemple p_i=3,7

Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

$$\min C_{\max}$$

$$C_{\max} \geq t_e + (z_{ie} - z_{i(e-1)})p_i \qquad \forall e \in V, \forall i \in A$$

$$t_0 = 0$$

$$t_f \geq t_e + ((z_{ie} - z_{i(e-1)}) - (z_{if} - z_{i(f-1)}) - 1)p_i \qquad \forall (e, f, i) \in V^2 \times A, f > e \neq 0$$

$$t_{e+1} \geq t_e \qquad \forall e \neq n-1 \in V$$

$$\sum_{e'=0}^{e-1} z_{ie'} \geq e(1 - (z_{ie} - z_{i(e-1)})) \qquad \forall e \neq 0 \in V$$

$$\sum_{e'=e}^{n-1} z_{ie'} \geq e(1 + (z_{ie} - z_{i(e-1)})) \qquad \forall e \neq 0 \in V$$

$$\sum_{e \in V} z_{ie} \geq 1 \qquad \forall i \in A$$

$$z_{ie} + \sum_{e'=0}^{e} z_{je'} \leq 1 + (1 - z_{ie})e \qquad \forall (i, j) \in E, \forall e \in V$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_{ik} z_{ie} \leq B_k \qquad \forall e \in V, \forall k \in R$$

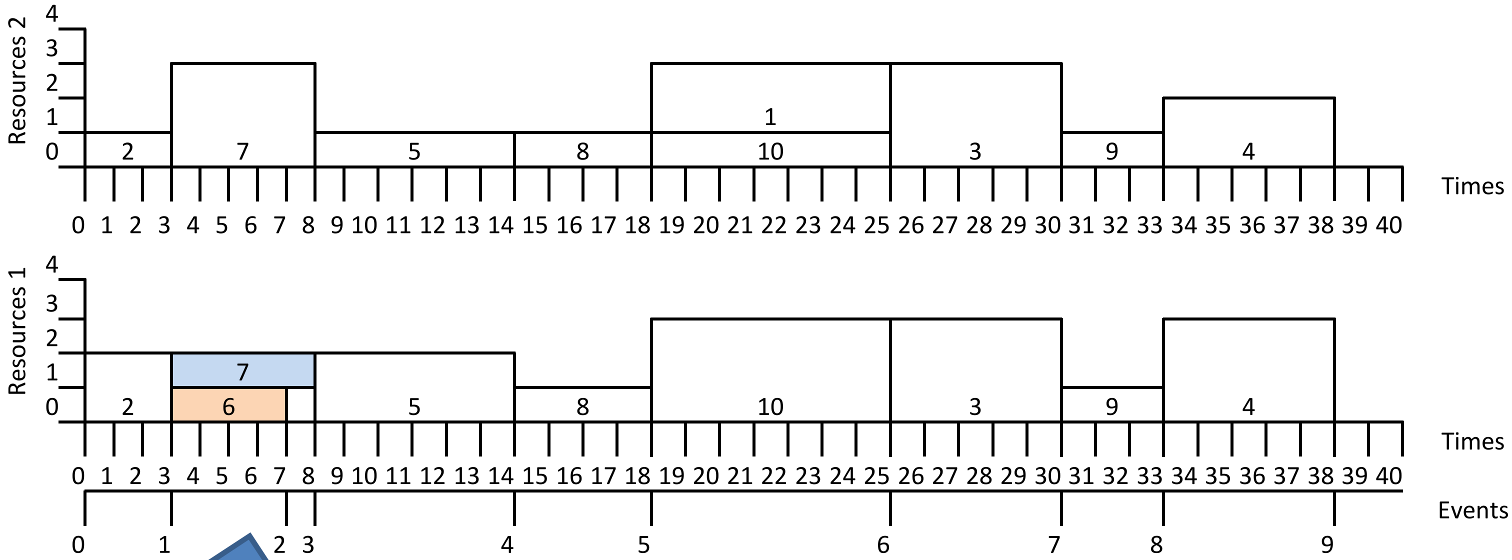
$$t_e \geq 0 \qquad \forall e \in V$$

$$z_{ie} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in A, \forall e \in V$$

Formulations PLNE basées sur les événements

Formulations	# Var. binaires	# Var. continues	# Contraintes
DT	$(n+2)(T+1)$	0	$\|E\|+(T+1)m+n+2$
DDT	$(n+2)(T+1)$	0	$(T+1)(m+\|E\|)+n+2$
FCT	$(n+2)^2$	$m(n+2)^2+n+2$	$n^3+(m+(15/2)n^2+(4m+(35/2))n+5m+13$
SEE	$2n^2+2n$	$n+1$	$(1/2)n^3+n^2+(3+\|E\|+m)n+\|E\|+m+1$
OOE	n^2	$n+1$	$(1/2)n^3-(1/2)n^2+(3+\|E\|+m)n-2$

Formulations PLNE basées sur les événements



x \ t	2	3	4	5	6	7	8
x_{6t}	0	1	0	0	0	0	0
x_{7t}	0	1	0	0	0	0	0

DT & DDT

	0	1	2	3
x_{6e}	0	1	0	0
y_{6e}	0	0	1	0
x_{7e}	0	1	0	0
y_{7e}	0	0	0	1

SEE

	0	1	2	3
z_{6e}	0	1	0	0
z_{7e}	0	1	1	0

OOE

PLAN DE LA PRESENTATION

- Définition du problème

- Formulation PLNE pour le RCPSP:
    - Formulation basique à temps discret (DT)
    - Formulation désagrégée à temps discret (DDT)
    - Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT)

- Formulations PLNE basées sur les événements
    - Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)
    - Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

- **Instances**
    - Instances classiques
    - Nouvelles instances proposées

- Etude comparative

- Conclusions et perspectives

INSTITUT de MATHEMATIQUES de TOULOUSE

Instances

Instances classiques
•KSD30 : psplib, Kolisch,
•BL : Baptiste Le Pape
•Pack: Carlier Néron

➔ Insuffisances : durées totales assez courtes, pas toujours le cas en industrie

Nouvelles instances proposées (disponibles sur http://www.laas.fr/~okone/)
•KSD15_d : KSD30 modifiées
•Pack_d : Cumulatives, durée opératoires longues

	KSD30	BL	PACK	KSD15_d	PACK_d
$\|A\|$	32	22 - 27	17 - 35	17	17 - 35
$\|R\|$	4	3	2 - 5	4	2 - 5
T	34-130	14-34	23-139	187 -999	644-3694
PR	10	5	19	250	1138

PR= $\mathrm{Max}(p_i) / \min(p_i)$

PLAN DE LA PRESENTATION

- Définition du problème

- Formulation PLNE pour le RCPSP:
  - Formulation basique à temps discret (DT)
  - Formulation désagrégée à temps discret (DDT)
  - Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT)

- Formulations PLNE basées sur les événements
  - Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)
  - Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

- Instances
  - Instances classiques
  - Nouvelles instances proposées

- **Etude comparative**

- Conclusions et perspectives

Comparaison des 5 modèles testés / résolution exacte des 5 instances

Configuration logicielle et matérielle :

- Solveur de calcul : Ilog-Cplex.
- Configuration de Cplex: par défaut,
- Environnement de programmation : Ilog-Concert, C++,
- Limite de temps : TL = 500 secondes,
- Machine : PC Dell, XEON 5110 bi-processeur 1.6Ghz, 4GB RAM, Fedora.

Etude comparative

Résultats

Opt. Sol.: Solution optimale au bout de 500 sec.

Non-opt.: Sol.: Solution trouvée, pas prouvée optimale

No Sol.: Instances n'ayant pas été résolues au bout de 500 sec.

Total Sol.: Opt. Sol+ Non-opt. Sol.

Time : temps de résolution

% : Pourcentage de Opt. Sol ou de Non-opt. Sol ou de No Sol.

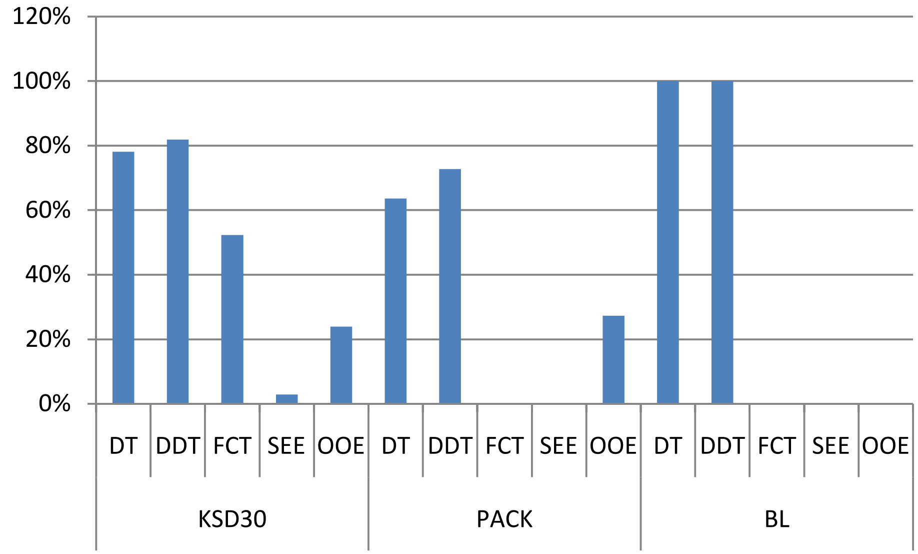
		Opt. Sol.		Non-opt. Sol.		Total Sol.	No Sol.
Instances	Formulations	%	Time	%	Gap	%	%
KSD30	DT	78%	12,76	8%	6%	86%	14%
	DDT	82%	10,45	9%	5%	91%	9%
	FCT	52%	33,81	4%	2%	56%	44%
	SEE	3%	123,62	0%	4%	3%	97%
	OOE	24%	112,62	9%	5%	33%	67%
Pack	DT	64%	37,32	9%	2%	73%	27%
	DDT	73%	61,09	22%	127%	95%	5%
	FCT	0%	0,00	2%	13%	2%	98%
	SEE	0%	0,00	0%	0%	0%	100%
	OOE	27%	20,63	18%	127%	45%	55%
BL	DT	100%	37,93	0%	0%	100%	0%
	DDT	100%	13,68	0%	0%	100%	0%
	FCT	0%	0,00	0%	0%	0%	100%
	SEE	0%	0,00	8%	13%	8%	92%
	OOE	0%	0,00	49%	0%	49%	51%
KSD15_d	DT	55%	6,34	1%	0%	56%	44%
	DDT	5%	1,65	0%	0%	5%	95%
	FCT	95%	7,87	4%	0%	99%	1%
	SEE	76%	10,95	18%	1%	94%	6%
	OOE	82%	2,96	18%	0%	100%	0%
Pack_d	DT	0%	0,00	0%	0%	0%	100%
	DDT	0%	0,00	0%	0%	0%	100%
	FCT	4%	7,58	0%	0%	4%	96%
	SEE	4%	215,08	0%	0%	4%	96%
	OOE	18%	75,58	42%	0%	60%	40%

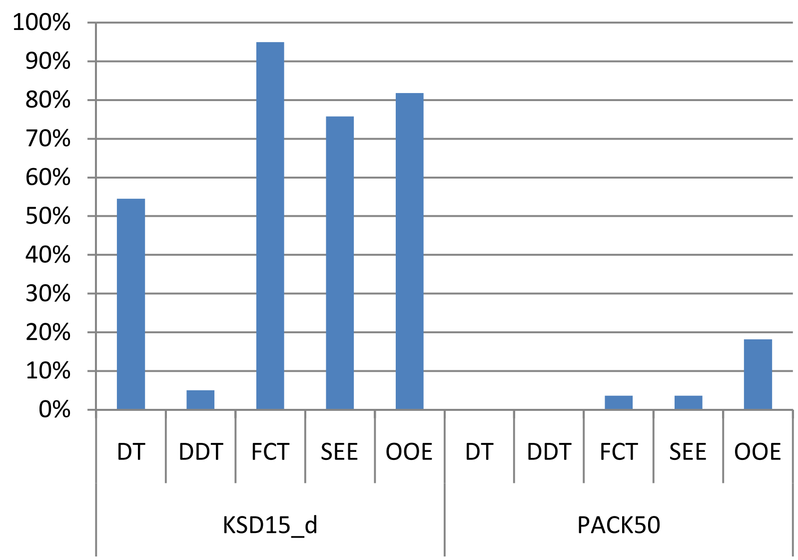
INSTITUT de MATHEMATIQUES de TOULOUSE

Etude comparative

Résultats – Solutions optimales

Résultats

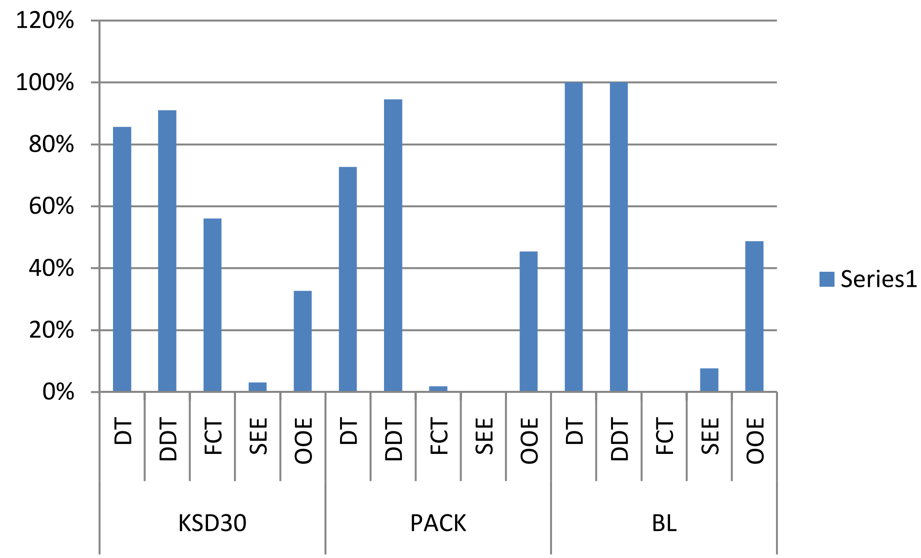




Etude comparative

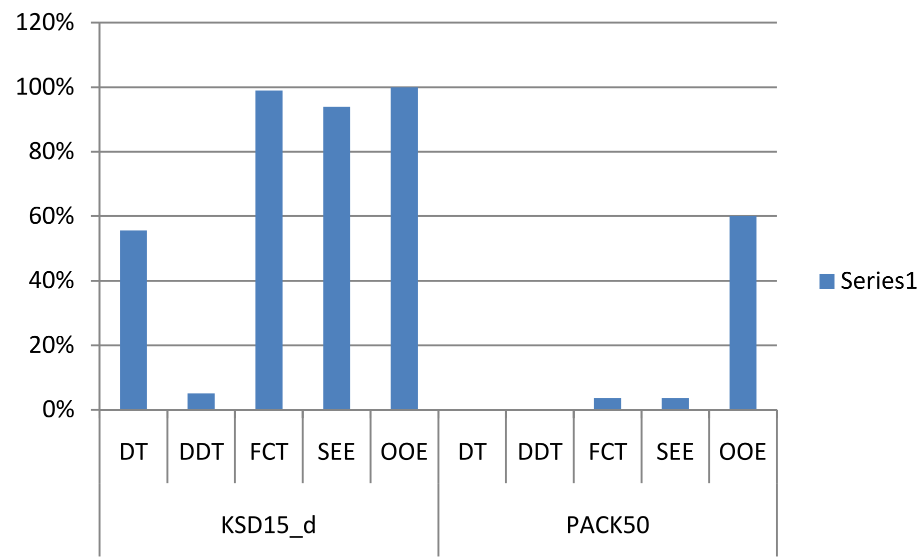
Résultats – Solutions totales
(Sol. optimales + Sol. Non-optimales)

KSD30, Pack, BL



Résultats

KSD15_d, Pack_d



PLAN DE LA PRESENTATION

- Définition du problème

- Formulation PLNE pour le RCPSP:
  - Formulation basique à temps discret (DT)
  - Formulation désagrégée à temps discret (DDT)
  - Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT)

- Formulations PLNE basées sur les événements
  - Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)
  - Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

- Instances
  - Instances classiques
  - Nouvelles instances proposées

- Etude comparative

- **Conclusions et perspectives**

Conclusions

Proposition d'une nouvelle formulation PLNE pour le RCPSP, basée sur la notion d'événements : Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

- Moins de variables binaires
- Adaptée pour des instances de comportant de longues durées opératoires
- Pouvant traiter des instances comportant des durée opératoires non entières

Proposition de 2 nouvelles séries d'instances

- KSD15_d
- Pack_d
- Portant des durées opératoires très longues

OOE présente de bons résultats sur les instances KSD15_d & Pack_d

DDT présente les meilleurs résultats sur les instances KSD30, BL & Pack

Perspectives

- ❑Améliorer par des coupes la qualité des relaxations des PLNE
- ❑ Application à l'ordonnancement dans l'industrie du process
- ❑ Proposer des modèles hybrides

MERCI DE VOTRE ATTENTION

INSTITUT de MATHEMATIQUES de TOULOUSE