ROADEF’09 – 10-12.02 - Nancy

Une formulation PLNE efficace pour $1|r_i|L_{max}$

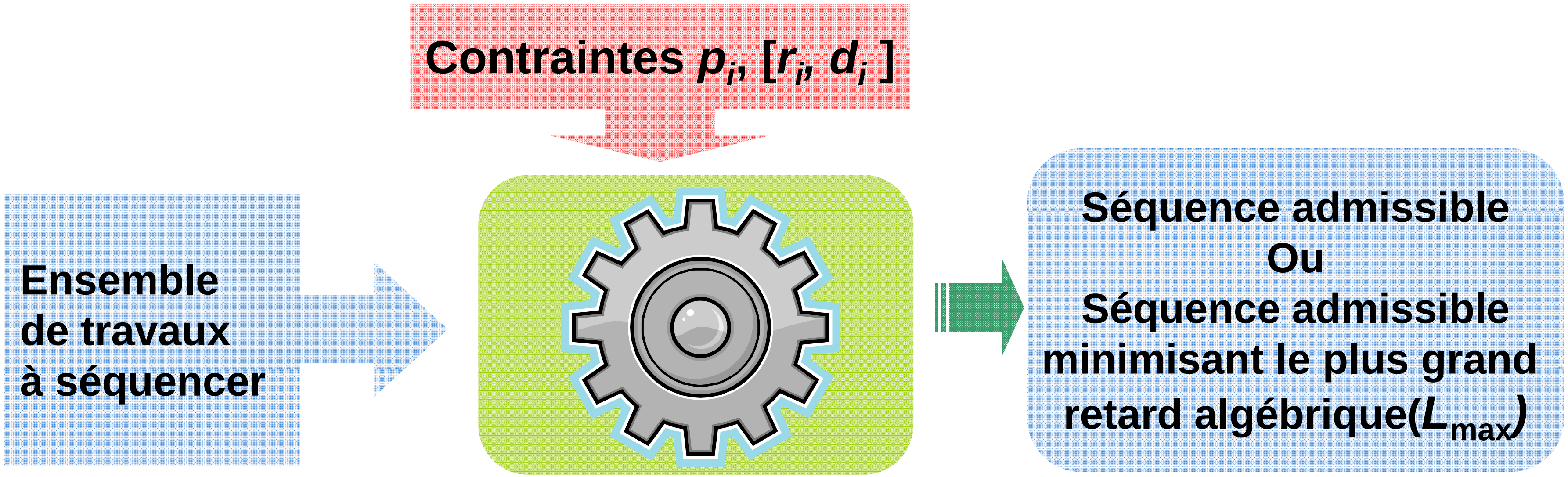
Cyril Briand et Samia Ourari

Université Paul Sabatier TOULOUSE III

CNRS LAAS

Introduction

- **Ordonnancement d'un ensemble V de n travaux sur une machine unique**



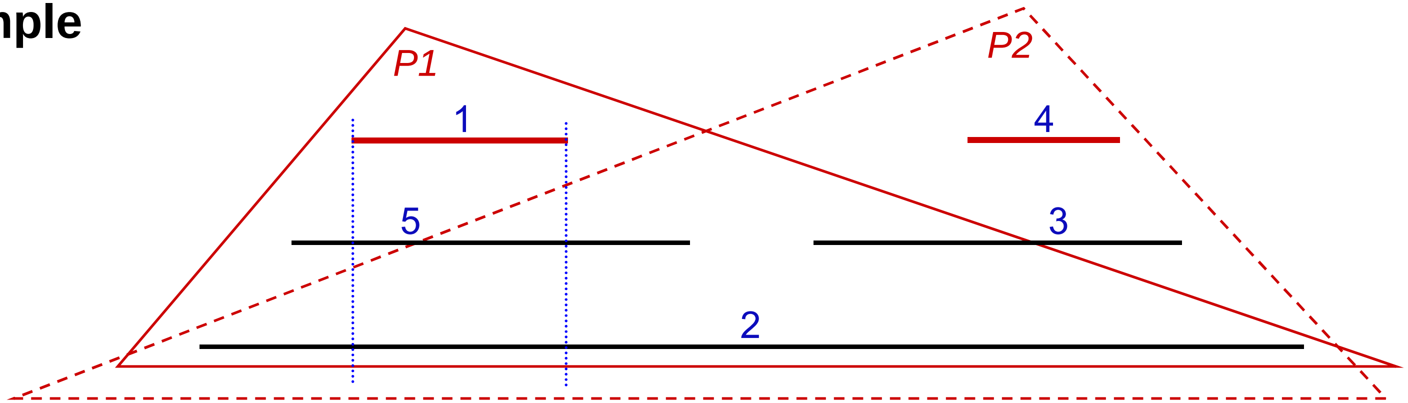
- **$1|r_i|L_{max}$ NP-difficile au sens fort (Lenstra et al., 1975)**
  - Procédure arborescente de Carlier (Carlier, 1982) :
    - Résolution efficace de problèmes comptant plusieurs milliers de travaux!
- **Objectif**
  - Trouver une formulation PLNE efficace => plus générique qu'une PSE

Plan

- Un théorème de dominance
- Un PLNE pour le cas mono-pyramidal
- Extension au cas général
- Implémentation
- Conclusion

Notions de Sommet et Pyramide

- On considère la structure d'intervalles définit par les fenêtres d'exécution $[r_i\ d_i]$ des travaux.
- **Sommet**
  - Un intervalle t est dit sommet d'une structure d'intervalles s'il n'existe pas de travail $i \in V$ tel que l'intervalle de i est strictement inclus dans celui de t.
- **Pyramide**
  - Une pyramide, associée au sommet *t*, est le sous ensemble de travaux dont les intervalles d'exécution incluent celui de *t*
- **Exemple**



Le théorème des pyramides

Toute séquence de la forme suivante est dominante vis-à-vis de l'admissibilité

$$\sigma_\Delta = \alpha_0 \prec t_0 \prec \beta_0 \prec \alpha_1 \prec t_1 \prec \beta_1 \prec \ldots \prec \alpha_m \prec t_m \prec \beta_m$$

[Erschler et al., 83]

$\boldsymbol{t_k}$ sommet de la pyramide *k* (*m* sommets)

α_k séquence de travaux appartenant à la pyramide $\boldsymbol{P_k}$ classés par ordre croissant des r_i

β_k séquence de travaux appartenant à la pyramide $\boldsymbol{P_k}$ classés par ordre croissant des d_i

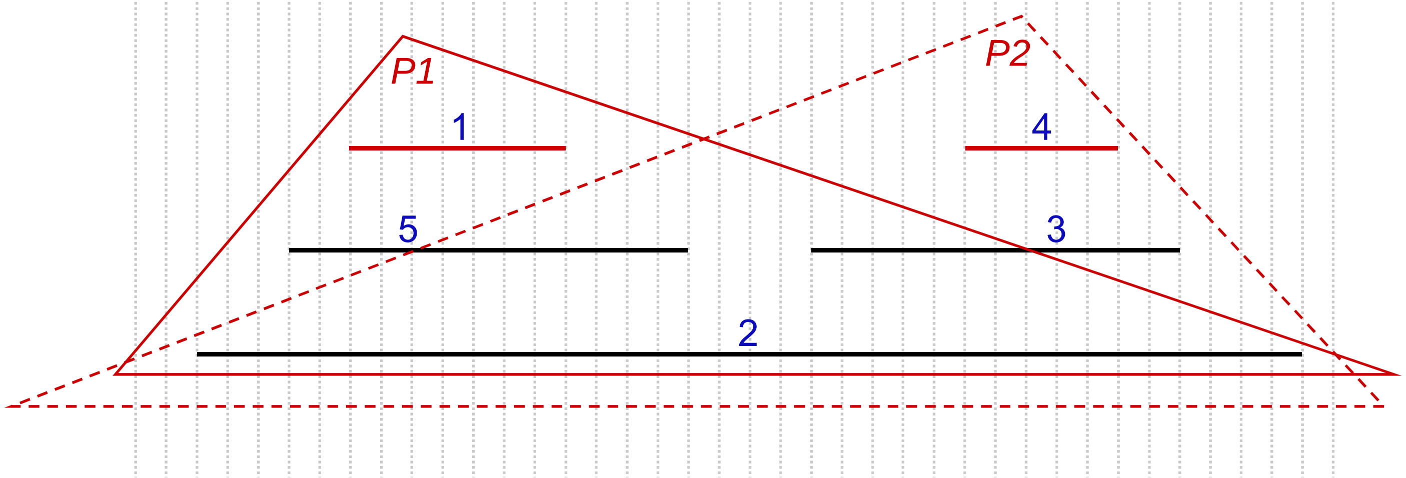
un travail non-sommet peut se trouver soit dans α_k, soit dans β_k, s'il appartient à P_k

- **Propriétés de dominance**
  - ➔ S'il existe une séquence admissible $\sigma_1 \notin \sigma_\Delta$ alors il existe une solution $\sigma_2 \in \sigma_\Delta$ telle que : σ_1 admissible $\Rightarrow$ σ_2 admissible
  - ➔ S'il n'existe pas de solution admissible parmi les solutions dominantes alors il n'existe pas de solutions admissibles pour le problème
  - ➔ Réduction de l'espace de recherche

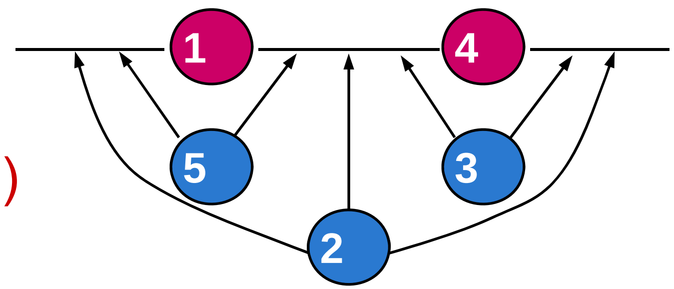
Un théorème de dominance

- **Exemple**

CH Restreint :
$r_2<r_5<r_1<d_1<d_5<r_3<r_4<d_4<d_3<d_2$



12 séquences dominantes
(parmi les 5!=120 seq. possible)



Plan

- Un théorème de dominance
- Un PLNE pour le cas mono-pyramidal
- Extension au cas général
- Implémentation
- Conclusion

Condition numérique de dominance

- **Le problème est caractérisé par une unique pyramide de sommet *t***

Toute séquence dominante σ est de la forme $\alpha \prec t \prec \beta$

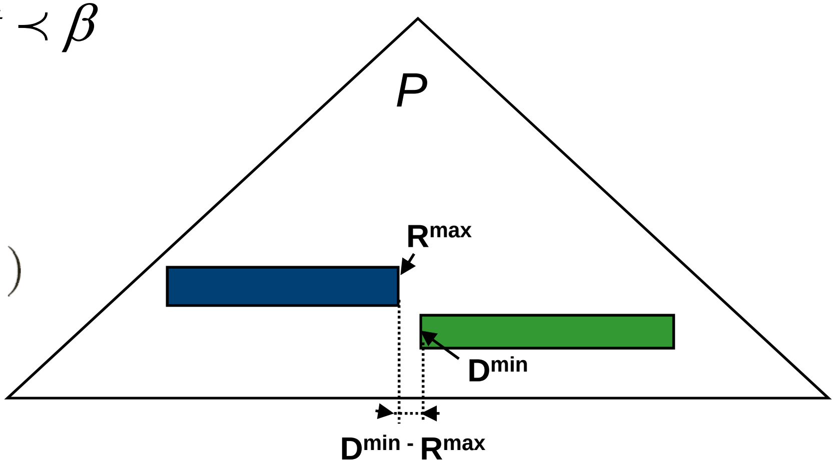
On note :

Date de fin au plus tôt de la séquence de travaux α

$$R^{\max} = \max_{a\in\alpha}\left(r_t, r_a + p_a + \sum_{k\in\alpha, a\prec k}(p_k)\right)$$

Date de début au plus tôt de la séquence de travaux β

$$D^{\min} = \min_{b\in\beta}\left(d_t, d_b - p_b - \sum_{k\in\beta, k\prec b}(p_k)\right)$$



Théorème

Une séquence est admissible si et seulement si $D^{\min} - R^{\max} - p_t \geq 0$

Corollaire

Soient $\alpha_1 \prec t \prec \beta_1$ et $\alpha_2 \prec t \prec \beta_2$ deux séquences dominantes,
si $D_1^{\min} - R_1^{\max} \geq D_2^{\min} - R_2^{\max}$ alors $\alpha_1 \prec t \prec \beta_1$ domine $\alpha_2 \prec t \prec \beta_2$
vis-à-vis de l'admissibilité.

- La séquence la plus dominante peut être déterminée en résolvant le PLNE suivant :

$$\max\ z = \boxed{D - R}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} R \geq r_t \\ D \leq d_t \\ R \geq \boxed{r_i + \sum_{\{j \in V \setminus \{t\} | r_j \geq r_i\}} p_j x_j^+} & , \forall i \in V \\ D \leq \boxed{d_i - \sum_{\{j \in V \setminus \{t\} | d_j \leq d_i\}} p_j x_j^-} & , \forall i \in V \\ \boxed{x_i^- + x_i^+ = 1} & , \forall i \in V \\ x_i^- \ , \ x_i^+ \in \{0,1\} & , \forall i \in V \\ D \ , \ R \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

R_i

D_i

$x_i^+ = 1$ ➔ travail i séquencé à gauche du sommet

Calcul de R_i, pour le travail *i*

Calcul de D_i, pour le travail *i*

$x_i^- = 1$ ➔ travail i séquencé à droite du sommet

Chaque travail i est séquencé soit à gauche soit à droite du sommet

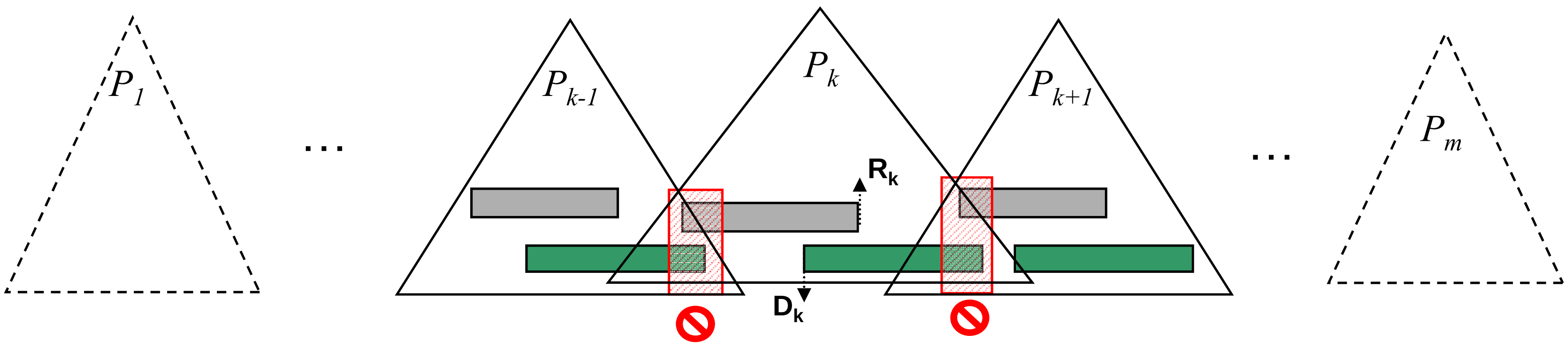
La séquence optimale du PLNE minimise $L_{max} = -z^* + p_t$

Plan

- Théorème de dominance
- La cas mono-pyramidal
- **Extension au cas général**
- **Implémentation**
- **Conclusion**

Extension

- **Première extension**
  - Tout travail non-sommet appartient à une et une seule pyramide
  - Décomposition en m sous-problèmes mono-pyramidaux interdépendants



- Interdépendance ➔ Éviter le chevauchement des séquences $\alpha_k \prec t_k \prec \beta_k$

➔ Nouvelles contraintes:

$$\begin{cases} r_j = \max(r_j, eft_{k-1}) \\ d_j = \min(d_j, lst_{k+1}) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} eft_{k-1} = R_{k-1} + p_{t_{k-1}} + \sum_{j \notin p_{k-1}} p_j x_j^- \\ lst_{k+1} = D_{k+1} - p_{t_{k+1}} - \sum_{j \notin p_{k+1}} p_j x_j^+ \end{cases}$$

eft_{k-1} : date de fin au plus tôt de la séquence $\alpha_{k-1} \prec t_{k-1} \prec \beta_{k-1}$

lst_{k+1} : date de début au plus tard de la séquence $\alpha_{k+1} \prec t_{k+1} \prec \beta_{k+1}$

Extension

$$\max \ z = \min_{k=1,\dots,m}(D_k - R_k - p_{t_k})$$

Éviter le chevauchement des séquences $\alpha_k \prec t_k \prec \beta_k$

$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{lllllll}
R_k & \geq & r_{t_k} & & , & \forall k \in [1\ m] & \\
D_k & \leq & d_{t_k} & & , & \forall k \in [1\ m] & \\
R_k & \geq & r_i & + \sum_{\{j \in P_k | r_j \geq r_i\}} p_j x_j^+ & , & \forall k \in [1\ m] & , \forall i \in P_k \\
D_k & \leq & d_i & - \sum_{\{j \in P_k | d_j \leq d_i\}} p_j x_j^- & , & \forall k \in [1\ m] & , \forall i \in P_k \\
R_k & \geq & R_{k-1} & + \sum_{\{j \in P_{k-1}\}} p_j x_j^- & & + p_{t_{k-1}} & \\
 & & & + \sum_{\{j \in P_k | r_j \geq r_i\}} p_j x_j^+ & , & \forall k \in [2\ m] & , \forall i \in P_k \\
D_k & \leq & D_{k+1} & - \sum_{\{j \in P_{k+1}\}} p_j x_j^+ & & - p_{t_{k+1}} & \\
 & & & - \sum_{\{j \in P_k | d_j \leq d_i\}} p_j x_j^- & , & \forall k \in [1\ (m-1)] & , \forall i \in P_k \\
x_i^- & + & x_i^+ & = 1 & , & \forall i \in P_k & \\
x_i^- & , & x_i^+ & \in \{0, 1\} & , & \forall i \in P_k & \\
D_k & , & R_k & \in \mathbb{Z} & , & \forall k \in [1\ m] &
\end{array} \right.$$

Le travail *i* appartient à une pyramide unique

Extension

Cas général : un travail non sommet peut appartenir à plusieurs pyramides

u(i), v(i) : Indice de la première, (resp. dernière) pyramide à laquelle le travail i appartient

$$\max \ z = \min_{k=1,\dots,m}(D_k - R_k - p_{t_k})$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} R_k \geq r_{t_k} & , \forall k \in [1\ m] \\ D_k \leq d_{t_k} & , \forall k \in [1\ m] \\ R_k \geq r_i + \sum_{\{j \in P_k | r_j \geq r_i\}} p_j x^+_{kj} & , \forall k \in [1\ m], \forall i \in P_k \\ D_k \leq d_i - \sum_{\{j \in P_k | d_j \leq d_i\}} p_j x^-_{kj} & , \forall k \in [1\ m], \forall i \in P_k \\ R_k \geq R_{k-1} + \sum_{\{j \in P_{k-1}\}} p_j x^-_{(k-1)j} + p_{t_{k-1}} & \\ \qquad + \sum_{\{j \in P_k | r_j \geq r_i\}} p_j x^+_{kj} & , \forall k \in [2\ m], \forall i \in P_k \\ D_k \leq D_{k+1} - \sum_{\{j \in P_{k+1}\}} p_j x^+_{(k+1)j} - p_{t_{k+1}} & \\ \qquad - \sum_{\{j \in P_k | d_j \leq d_i\}} p_j x^-_{kj} & , \forall k \in [1\ (m-1)], \forall i \in P_k \\ \boxed{\sum_{k=u(i)}^{v(i)} (x^-_{ki} + x^+_{ki}) = 1} & , \forall k \in [1\ m], \forall i \in P_k \\ x^-_{ki}\ ,\ x^+_{ki} \in \{0, 1\} & \\ D_k\ ,\ R_k \in \mathbb{Z} & , \forall k \in [1\ m] \end{cases}$$

Le travail i appartient à la pyramide P_k

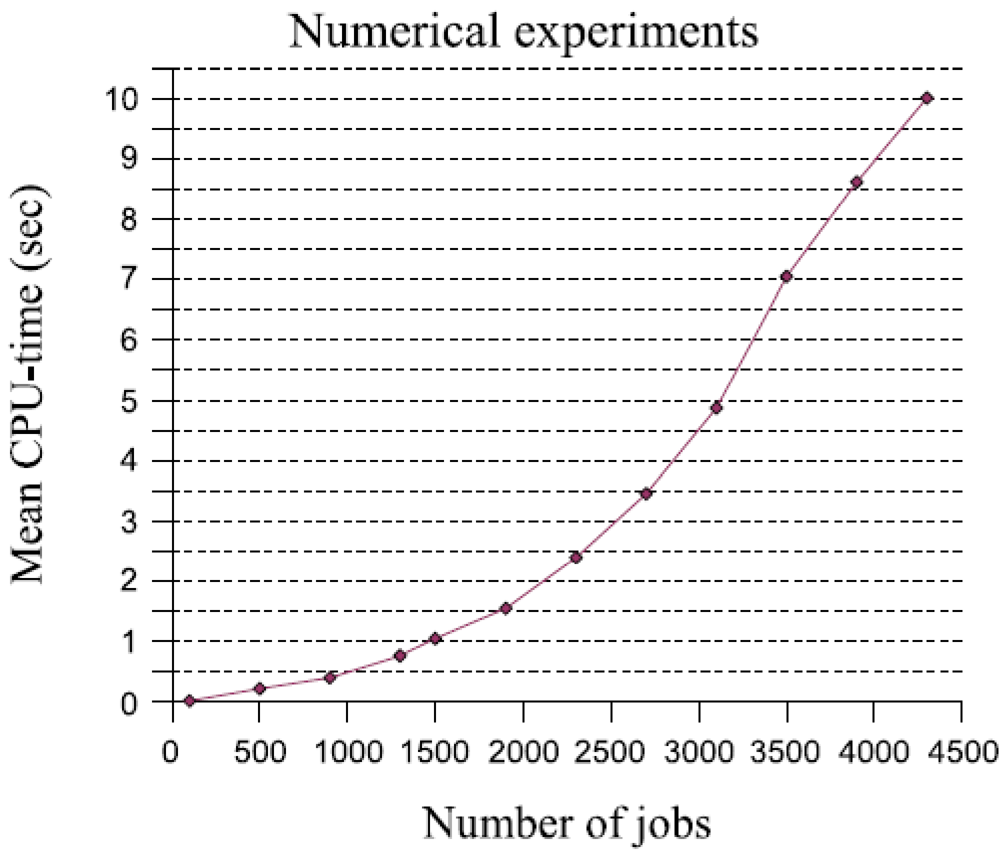
Plan

- Un théorème de dominance
- Un PLNE pour le cas mono-pyramidal
- Extension au cas général
- **Implémentation**
- **Conclusion**

Implémentation

➔Implémentation en C^{++} - ILOG Concert
➔1.60 GHz Intel Xeon - 2 Go RAM

➔Premier tests : Instances de 100 à 4300 travaux (10 instances par taille)



Implémentation

- **Deuxième série de tests**
  - Pour n:=100 à 4500, génération de 300 instances
    - Méthode de [Hariri & Potts 83]
    - $p_i \in [1\ 100]$, $r_i \in [0, \alpha^*\sum p_i]$ et $d_i \in [(1-\beta)^*a^*\sum p_i, a^*\sum p_i]$
    - $\alpha \in [10,20, \ldots, 100\%]$, a=100% ou 110% ou 120%, $\alpha \in [10,20, \ldots, 100\%]$
  - Sélection des 10 instances les plus difficiles
    - Utilisation de la procédure de Carlier [Carlier 82]
    - Critère = nombre de nœuds explorés
  - Problème
    - Les instances les plus dures sont celles où le nombre moyen d'affectations autorisées pour un travail non-sommet est très important (voisin du nombre de sommets)
    - Dans ce cas le nombre de variables du PLNE explose => limites mémoires atteintes pour génération du modèle Cplex
    - Jusqu'à 500 travaux, temps de calcul identique.

Plan

- Un théorème de dominance
- Un PLNE pour le cas mono-pyramidal
- Extension au cas général
- Implémentation
- **Conclusion**

Conclusion / perspective

Conclusion

- Conditions de dominance ➔ Formulation PLNE originale et ~efficace
- Minimisation du retard algébrique
- Minimisation du nombre de travaux en retard ➔ Bornes inférieures et supérieures
- Caractérisation de la difficulté des instances

Perspectives

- Continuer les expérimentations
- Repenser l'algorithme de résolution