

# Contrôleurs à réinitialisation - un aperçu

**Thomas Loquen**   Christophe Prieur   Sophie Tarbouriech

**LAAS-CNRS**   **Toulouse**

# Outline

## Les systèmes hybrides

- Généralités

- Bibliographie

## Modélisation

- Modélisation hybride

## Analyse en stabilité et performance

- Approche choisie

- Conditions de stabilité et performance sans saturation

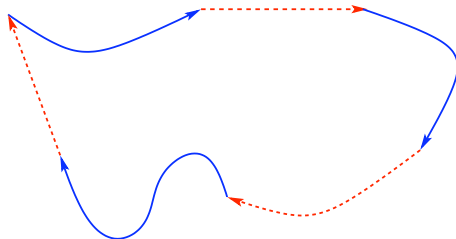
- Conditions de stabilité avec saturation

## Simulations

## Conclusion

# Systèmes hybrides

Classe de systèmes dynamiques associant des comportements de type temps continu et temps discret : succession de trajectoires continues (ou flux) et discrètes (ou saut).



## Motivations

L'interaction entre équations continues et discrètes du mouvement peut permettre de dépasser les limites du continu :

- ▶ **Enrichissement des modèles - description des phénomènes** : circuits électriques, systèmes biologiques, systèmes mécaniques ...
- ▶ **Plus grande flexibilité pour la commande** : contrôleur continu avec variables discrètes (passage d'un mode à un autre, réinitialisation de composant , ...) pour améliorer la convergence ou les performances du système bouclé.

## Les systèmes à réinitialisation : une classe de systèmes hybrides [Goebel et al., 2004]

La modélisation, et les solutions, d'un système hybride doit rendre compte des dynamiques continue et discrète :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, j) &= f(x(t, j)) \text{ si } x(t, j) \in \mathcal{F} \text{ et } t \in [t_j, t_{j+1}) \\ x(t_{j+1}, j+1) &= g(x(t_{j+1}, j)) \text{ si } x(t_{j+1}, j) \in \mathcal{J}, j \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Solutions définies sur un *domaine de temps hybride* :

$$\bigcup_j [t_j, t_{j+1}) \times \{j\}$$

[Clegg, 1958] Premier contrôleur à réinitialisation : l'intégrateur de Clegg réduit la marge de phase de l'intégrateur linéaire.

[Horowitz et al., 1975] First Order Reset Element (FORE).

[Beker et al.,01] [Hollot et al.,01] Analyse de système en boucle fermée incluant un intégrateur de Clegg ou un FORE.

[Zaccarian et al.,05] [Nešić and al.,08] Caractérisation des avantages des contrôleurs à réinitialisation.

[Loquen et al., 07] Analyse en stabilité et performance de systèmes à réinitialisation en présence de saturation.

[Baños et al., 09] Stabilité des systèmes à réinitialisation avec retard.

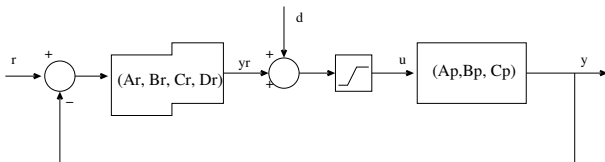
[Bakkeheim et al., 08] Réinitialisation dépendante d'une fonction de Lyapunov.

## ► Système à commander

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + B_p \text{sat}(u) + B_p d d, \\ y &= C_p x_p.\end{aligned}$$

## ► Contrôleur à réinitialisation

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= A_c x_r + B_c e, \text{ si } e y_r \geq 0 \\ x_r^+ &= A_r x_r + B_r e, \text{ si } e y_r \leq 0 \\ y_r &= C_c x_r + D_c e.\end{aligned}$$



Modélisation du système bouclé :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_f x + B \Psi(Kx) + B_r r + B_d d \text{ si } x \in \mathcal{F}, \\ x^+ &= A_j x \text{ si } x \in \mathcal{J}, \\ y &= Cx.\end{aligned}$$

- ▶ La nonlinéarité  $\Psi(Kx)$  est définie comme :

$$\psi(Kx) = \text{sat}(Kx) - Kx.$$

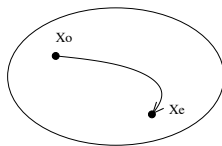
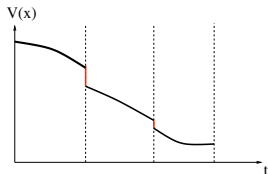
- ▶ Les états du système à commander ne sont pas concernés par le saut.
- ▶ Les sous espaces de flux et de saut,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{J}$  s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \{x \in \mathbb{R}^n ; x' Q' M Q x \geq 0\} & \text{avec } M &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{J} &:= \{x \in \mathbb{R}^n ; x' Q' M Q x \leq 0\} & \text{et } Q &= \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ D_r C_p & C_r \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## Quelques rappels sur les concepts mathématiques utilisés :

- ▶ **Théorie de Lyapunov** : le système converge vers un état d'équilibre s'il existe une fonction de Lyapunov candidate décroissante sur les parties continues et sur les sauts.



- ▶ **Stabilité  $\mathcal{L}_2$**  : un système est  $\mathcal{L}_2$  stable, s'il existe  $\gamma$  un gain fini tel que :

$$\frac{\|y\|_2}{\|d\|_2} \leq \gamma$$

où la norme  $\mathcal{L}_2$  d'un signal  $u$  est  $\|u\|_2^2 = \int_0^\infty u(t)'u(t)dt$ .

Ce gain est aussi un critère de performances.

## Conditions constructives

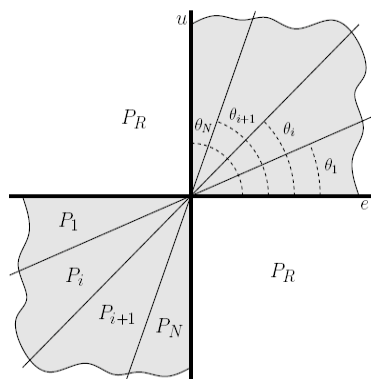
Utilisation d'Inégalité Matricielle Linaire (LMI) le problème mis sous forme de LMI se résout facilement l'aide d'outils numériques.

- ▶ calcul de la fonction de Lyapunov
- ▶ estimation du gain  $\mathcal{L}_2$
- ▶ dans le cas d'une entrée saturée, estimation du domaine de stabilité du système hybride

Pour les systèmes à réinitialisation, il peut être intéressant d'utiliser des **fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux**

$$V_i(x) = x'P_i x, \quad P_i = P_i' > 0, \quad i = 0, \dots, N.$$

## Fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux



Pour lever une partie du conservatisme lié aux fonctions quadratiques :

- ▶ Division en secteurs de l'espace d'état  $\Pi_i = \{x \in \mathbb{R}^n; x' S_i x \geq 0\}$  à partir des angles  $\theta_i$ .
- ▶ Une fonction de Lyapunov par secteur  $V_i(x) = x' P_i x$ .

Cette approche permet de considérer des contrôleurs instables sans reset.

## Analyse de stabilité et performance sans saturation

Nous devons vérifier que

- ▶  $\dot{V}(x, d) + \frac{1}{\gamma} y' y - \gamma d' d < 0, \forall x \in \Pi_i, i = 1, \dots, N$
- ▶  $\Delta V(x) \leq 0, \forall x \in \Pi_0$
- ▶ Continuité des fonctions de Lyapunov à l'intersection des secteurs

### Théorème

- ▶  $L_i(P_i, A_f, C, B_r, B_d, \gamma, S_i) < 0, i = 1, \dots, N$
- ▶  $L_0(P_0, A_j, S_0) \leq 0$
- ▶  $\mathbb{L}_0(P_0, P_1, \theta_0) = 0, \mathbb{L}_1(P_0, P_N, \theta_N) = 0$   
 $\mathbb{L}_i(P_i, P_{i+1}, \theta_i) = 0, i = 1, \dots, N - 1$

Alors

1. si  $d = 0$ , le système hybride est asymptotiquement stable
2. si  $d \neq 0$  et  $x_0 = 0$ , le gain  $\mathcal{L}_2$  entre  $d$  et  $y$  est fini et inférieur

## Analyse de stabilité avec saturation

Pour les systèmes saturés, la stabilité est liée au choix de la condition initiale : estimation d'un domaine de stabilité local positivement invariant.

Soit une matrice  $G \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  définissant l'espace suivant :

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_0 \preceq (K - G)x \preceq u_0\}.$$

Il y a stabilité si :

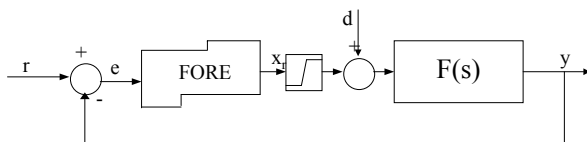
- ▶ Pour les trajectoires continues, les fonctions de Lyapunov satisfont  $\dot{V}_i(x) \leq 0 \forall x \in \Gamma$ .
- ▶ L'estimation du domaine de stabilité associés  $\mathcal{E}(P_i) = \{x \in \mathbb{R}^n; x'Px \leq 1\}$  est incluse dans l'espace  $\Gamma$ .
- ▶ La fonction de Lyapunov est non-croissante au cours des sauts.
- ▶ les conditions de continuités sont satisfaites.

## Theorème

- ▶  $L_i(P_i, A_f, C, B, GT, S_i) < 0, i = 1, \dots, N$
- ▶  $L_0(P_0, A_j, S_0) \leq 0$
- ▶  $\mathbb{L}_0(P_0, P_1, \theta_0) = 0, \mathbb{L}_1(P_0, P_N, \theta_N) = 0$   
 $\mathbb{L}_i(P_i, P_{i+1}, \theta_i) = 0, i = 1, \dots, N - 1$

Alors  $\bigcup_{i=0, \dots, N} \{x \in \mathbb{R}^n; x'P_i x \leq 1 \text{ if } x \in \Pi_i\}$  est une région de stabilité.

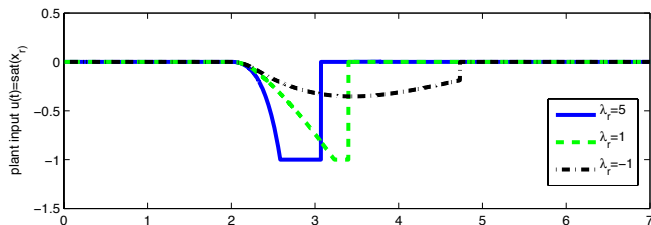
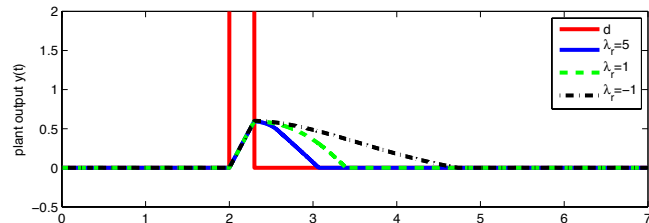
On s'intéresse l'analyse d'un système instable du premier ordre contrôlé par un FORE.



Application de notre théorème sur cette boucle de commande :

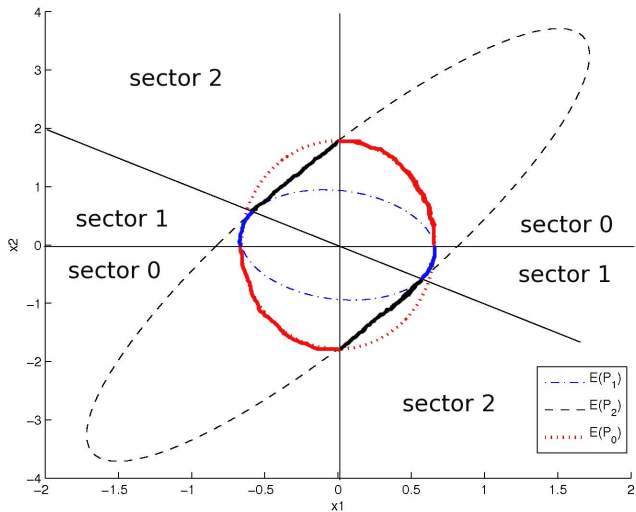
- ▶ Estimation du domaine de stabilité.
- ▶ Illustration avec une simulation dynamique.

# Simulation temporelle





# Domaine de stabilité



# Conclusion

Les systèmes avec réinitialisation sont une classe de systèmes hybrides qui, utilisés dans le cadre de la commande, peuvent permettre :

- ▶ d'améliorer les performances vis-à-vis d'un contrôleur linéaire y compris en présence de saturation.
- ▶ d'agrandir la région de stabilité d'un système soumis à des saturations.

Pour la suite de nos travaux :

- ▶ continuer à proposer de nouvelles conditions de reset
- ▶ passer à la synthèse de contrôleur à réinitialisation.