Nouvelles approches pour la résolution du problème d'ordonnancement de projet à ressources limitées (RCPSP)

Oumar Koné[1,2]

Directeur de thèse : **Pierre Lopez**[1]
Co-directeur : **Marcel Mongeau**[2]
Participant : **Christian Artigues**[1]

[1] LAAS-CNRS, Université de Toulouse
[2] Institut de Mathématiques, Université de Toulouse

PLAN DE LA PRESENTATION

- **Définitions, généralités sur le RCPSP**

- Formulation PLNE pour le RCPSP:
  - •Formulation basique à temps discret (DT)
  - •Formulation désagrégée à temps discret (DDT)
  - •Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT)

- Formulations PLNE basées sur les événements
  - •Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)
  - •Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

- Etude comparative
  - •Instances utilisées
  - •Conditions de test
  - •Résultats

- Crossdocking
  - •Définitions
  - •Branch & Bound
  - •Résultats

- Conclusions et perspectives

Définition du problème - Généralités

RCPSP : « Resource-Constrained Project Scheduling Problem »

Problème d'ordonnancement cumulatif
Grand nombre d'applications dans l'industrie.
Couvre un grand nombre de problèmes théoriques d'ordonnancement.

Méthodes de résolution

- Calculs de bornes inférieures;
- Méthodes de résolution exactes;
- Méthodes de résolution approchées.

Techniques utilisées

- Programmation Linéaire en Nombres Entiers;
- Programmation Par Contraintes;
- Branch and Bound;
- Relaxation Lagrangienne;
- Etc.

Définition du problème

Activités: Ensemble d'activités : $A = \{1, \ldots, n\}$ & activités fictives 0 et $n+1$

Durée opératoire de chaque activité i : p_i.

Ensemble de précédences (E):

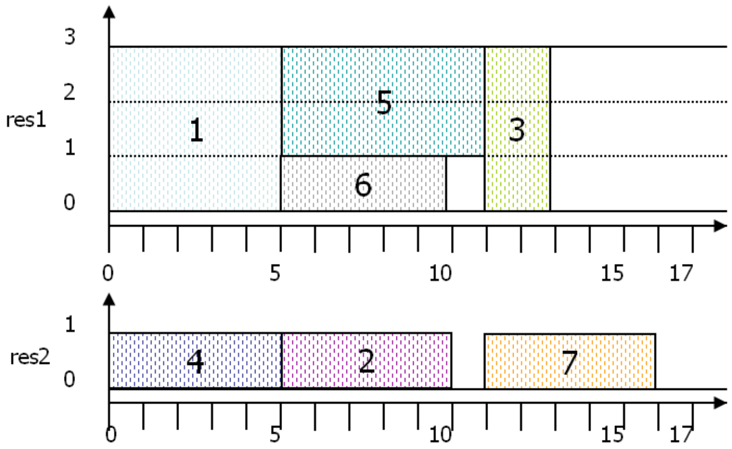
$(i, j) \in E$, avec i et $j \in A^2$ => l'activité i précède l'activité j.

Ressources

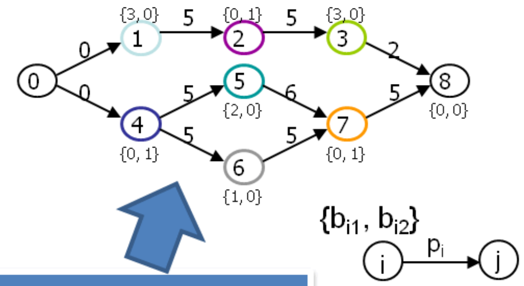
Ensemble de ressources: $R = \{1, \ldots, m\}$, *de capacité* R_k, *(pour chaque ressource k)*.

Consommation de la ressource k par l'activité i : b_{ik}.

Objectif: Minimiser la durée totale du projet (C_{max}).



Un ordonnancement réalisable



Graphe de précédence

Diagramme de Gantt

Formulation conceptuelle

- $H=\{0,\ldots,T\}$: Horizon d'ordonnancement du projet.

- Variables de décision
  S_i : date de début d'exécution de l'activité i, avec $S_0 = 0$.

- **minimiser** $C_{max} = S_{n+1}$
  Sous

$$
\begin{array}{lll}
C_{max} \geq S_i + p_i & \forall\, i \in A \cup \{0,n+1\} & \\
S_j \geq S_i + p_i & \forall\, (i,j) \in E & \text{(Contraintes de précédences)} \\
\Sigma_{i \in P(t)}\, b_{ik} \leq R_k & \forall\, t \in H,\ k \in R & \text{(Contraintes de ressources)} \\
S_i \geq 0 & \forall\, i \in A \cup \{0,n+1\} &
\end{array}
$$

- Avec $P(t) = \{\, i \mid S_i \leq t < S_i + p_i \,\}$ (difficilement identifiable)

- Le RCPSP est NP-difficile au sens fort

Pas de méthode exacte permettant de résoudre des problèmes de plus de 60 activités.

PLAN DE LA PRESENTATION

- Définitions, généralités sur le RCPSP
- **Formulation PLNE pour le RCPSP:**
  - Formulation basique à temps discret (DT)
  - Formulation désagrégée à temps discret (DDT)
  - Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT)
- Formulations PLNE basées sur les événements
  - Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)
  - Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)
- Etude comparative
  - Instances utilisées
  - Conditions de test
  - Résultats
- Crossdocking
  - Définitions
  - Branch & Bound
  - Résultats
- Conclusions et perspectives

Différentes types de formulations PLNE

- compactes : nombre polynomial de variables et de contraintes
- étendues : nombre exponentiel ou pseudo polynomial

Avantages/inconvénients

- étendues : qualité de la relaxation continue => bornes inférieures de qualité mais non utilisables directement dans un B&B pour des problèmes de taille moyenne
- compactes : taille plus réduite de l'arbre de recherche mais relaxation plus faible

Formulations compactes existantes pour le RCPSP : inefficaces sur les instances fortement cumulatives

Motivation : Proposer des formulations de type PLNE compactes, permettant de résoudre des instances fortement cumulatives

Formulation PLNE pour le RCPSP

Formulations utilisant des variables indexées par le temps (Formulations étendues)

Variable binaire de décision : x_{it}.

$x_{it} = 1$ si l' activité i démarre à t sinon 0, pour tout $i \in A \cup \{0,n+1\}$ et pour tout $t \in H$.

Remarque : $S_i = \sum_t t x_{it}$

Formulation basique à temps discret (DT)

$$\min \sum_{t \in H} t x_{n+1,t}$$

$$\sum_{t \in H} t x_{jt} \geq \sum_{t \in H} t x_{it} + p_i \quad \forall (i,j) \in E$$

$$\sum_{i \in A} b_{ik} \sum_{\tau = t - p_i + 1}^{t} x_{i\tau} \leq B_k, \forall t \in H, \forall k \in R$$

$$\sum_{t \in H} x_{it} = 1, \forall i \in A \cup \{0, n+1\}$$

Pritsker *et al. en* 1969

Formulation désagrégée à temps discret (DDT)

$$\min \sum_{t \in H} t x_{n+1,t}$$

$$\sum_{\tau = t}^{T} x_{i\tau} + \sum_{t=0}^{t+p_i-1} x_{jt} \leq 1, \forall t \in H, \forall (i,j) \in E$$

$$\sum_{i \in A} b_{ik} \sum_{\tau = t - p_i + 1}^{t} x_{i\tau} \leq B_k, \forall t \in H, \forall k \in R$$

$$\sum_{t \in H} x_{it} = 1, \forall i \in A \cup \{0, n+1\}$$

Christofides *et al. en* 1987

Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT) (Formulation compacte)

Variables séquentielles: x_{ij} activité *i* précède l'activité *j*
Variables continues: S_i date de début l'activité *i*
Gestion des contraintes de ressources par un modèle de flots (var. continues de flots f_{ijk})

$$\min S_{n+1}$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \qquad \forall (i,j) \in (A \cup \{0, n+1\})^2,\ i < j$$

$$xik \geq xij + xjk - 1 \qquad \forall (i,j,k) \in (A \cup \{0, n+1\})^3$$

C. de transitivités

$$x_{ij} = 1 \qquad \forall (i,j) \in E$$

$$S_j - S_i \geq -M + (p_i + M)x_{ij} \qquad \forall (i,j) \in (A \cup \{0, n+1\})^2$$

C. de précédences

$$f_{ijk} \leq \min(b_{ik}, b_{jk})x_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \cup \{0\} \times A \cup \{n+1\}, \forall k \in R$$

$$\sum_{j \in A \cup \{0,n+1\}} f_{ijk} = \beta_{ik} \qquad \forall i \in A \cup \{0, n+1\}, \forall k \in R$$

$$\sum_{i \in A \cup \{0,n+1\}} f_{ijk} = \beta_{jk} \qquad \forall j \in A \cup \{0, n+1\}, \forall k \in R$$

$$f_{ijk} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in (A \cup \{0, n+1\})^2, \forall k \in R$$

$$f_{(n+1)0k} = B_k \qquad \forall k \in R$$

$$\beta_{ik} = b_{ik} \qquad \forall i \in A, \forall k \in R$$

$$\beta_{0k} = \beta_{n+1,k} \qquad \forall k \in R$$

C. de ressources

$$S_i \geq 0 \qquad \forall i \in A \cup \{0, n+1\}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in (A \cup \{0, n+1\})^2$$

Artigues *et al. en 2003*

PLAN DE LA PRESENTATION

- Définitions, généralités sur le RCPSP

- Formulation PLNE pour le RCPSP:
  - Formulation basique à temps discret (DT)
  - Formulation désagrégée à temps discret (DDT)
  - Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT)

- **Formulations PLNE basées sur les événements**
  - Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)
  - Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

- Etude comparative
  - Instances utilisées
  - Conditions de test
  - Résultats

- Crossdocking
  - Définitions
  - Branch & Bound
  - Résultats

- Conclusions et perspectives

Formulations PLNE basées sur les événements

Inspiré des travaux de Dauzère-Pérès et Lasserre pour des ressources disjonctives

Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)

Événement = début ou fin d'exécution d'une activité

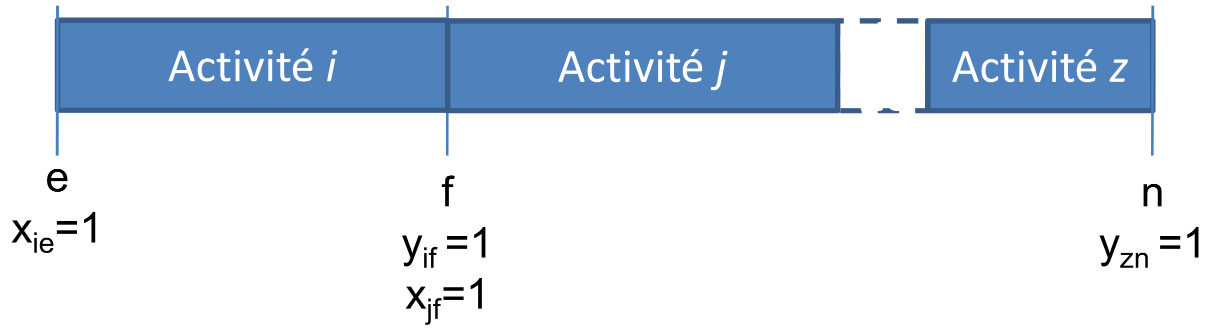
$V=\{0,1,\ldots,n\}$: Ensemble des événements

Nombre d'événements = nombre d'activités +1

Variables binaires indexées par des événements

x_{ie}: Var. binaire de début d'activité, $x_{ie}=1$ =>l'activité *i* débute à l'événement *e*

y_{ie}: Var. binaire de fin d'activité, $y_{ie}=1$ =>l'activité *i* finit à l'événement *e*



Variables continues

t_e: date de l'événement *e*

r_{ie}: consommation totale de la ressource *k* à l'événement *e*

Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)

$$\min t_n$$

$$t_0 = 0$$

$$t_f \geq t_e + p_i x_{ie} - p_i(1 - y_{if}) \qquad \forall (e,f) \in V^2, f > e, \forall i \in A$$

$$t_{e+1} \geq t_e \qquad \forall \in V, e < n$$

$$\sum_{e \in V} x_{ie} = 1 \qquad \forall i \in A$$

$$\sum_{e \in V} y_{ie} = 1 \qquad \forall i \in A$$

$$\sum_{e'=e}^{n} y_{ie'} + \sum_{e'=0}^{e-1} x_{je} \leq 1 \qquad \forall (i,j) \in E, \forall e \in V$$

$$r_{0k} = \sum_{i \in A} b_{ik} x_i \qquad \forall k \in R$$

$$r_{ek} = r_{(e-1)k} + \sum_{i \in A} b_{ik} x_{ie} - \sum_{i \in A} b_{ik} y_{ie} \qquad \forall e \in V, e \geq 1, \forall k \in R$$

$$r_{ek} = B_k \qquad \forall e \in V, \forall k \in R$$

$$x_{ie} \in \{0,1\}, y_{ie} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in A, \forall e \in V$$

$$t_e \geq 0 \qquad \forall e \in V$$

$$r_{ek} \geq 0 \qquad \forall e \in V, \forall k \in R$$

Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

Événement = début d'exécution d'une activité

$V=\{0,1,\ldots,n-1\}$: Ensemble des événements

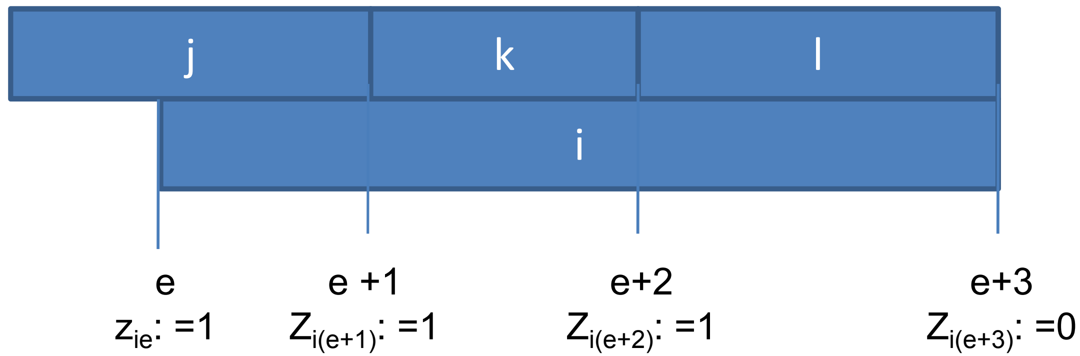
Nombre d'événements = nombre d'activités

Variables continues

t_e: date de l'événement *e*

Variables binaires indexées par des événements

z_{ie}: Var. binaire indiquant si l'activité *i* débute (ou est en cours) juste après l'événement *e*



Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

$$\min C_{\max}$$

$$C_{\max} \geq t_e + (z_{ie} - z_{i(e-1)})p_i \qquad \forall e \in V, \forall i \in A$$

$$t_0 = 0$$

$$t_f \geq t_e + ((z_{ie} - z_{i(e-1)}) - (z_{if} - z_{i(f-1)}) - 1)p_i \qquad \forall (e, f, i) \in V^2 \times A, f > e \neq 0$$

$$t_{e+1} \geq t_e \qquad \forall e \neq n-1 \in V$$

$$\sum_{e'=0}^{e-1} z_{ie'} \geq e(1 - (z_{ie} - z_{i(e-1)})) \qquad \forall e \neq 0 \in V$$

$$\sum_{e'=e}^{n-1} z_{ie'} \geq e(1 + (z_{ie} - z_{i(e-1)})) \qquad \forall e \neq 0 \in V$$

$$\sum_{e \in V} z_{ie} \geq 1 \qquad \forall i \in A$$

$$z_{ie} + \sum_{e'=0}^{e} z_{je'} \leq 1 + (1 - z_{ie})e \qquad \forall (i, j) \in E, \forall e \in V$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_{ik} z_{ie} \leq B_k \qquad \forall e \in V, \forall k \in R$$

$$t_e \geq 0 \qquad \forall e \in V$$

$$z_{ie} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in A, \forall e \in V$$

Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

- 2 fois moins de variables binaires que SEE

- Représentation facile de la contrainte de ressources

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_{ik} z_{ie} \leq B_k \quad \forall e \in V, \forall k \in R$$

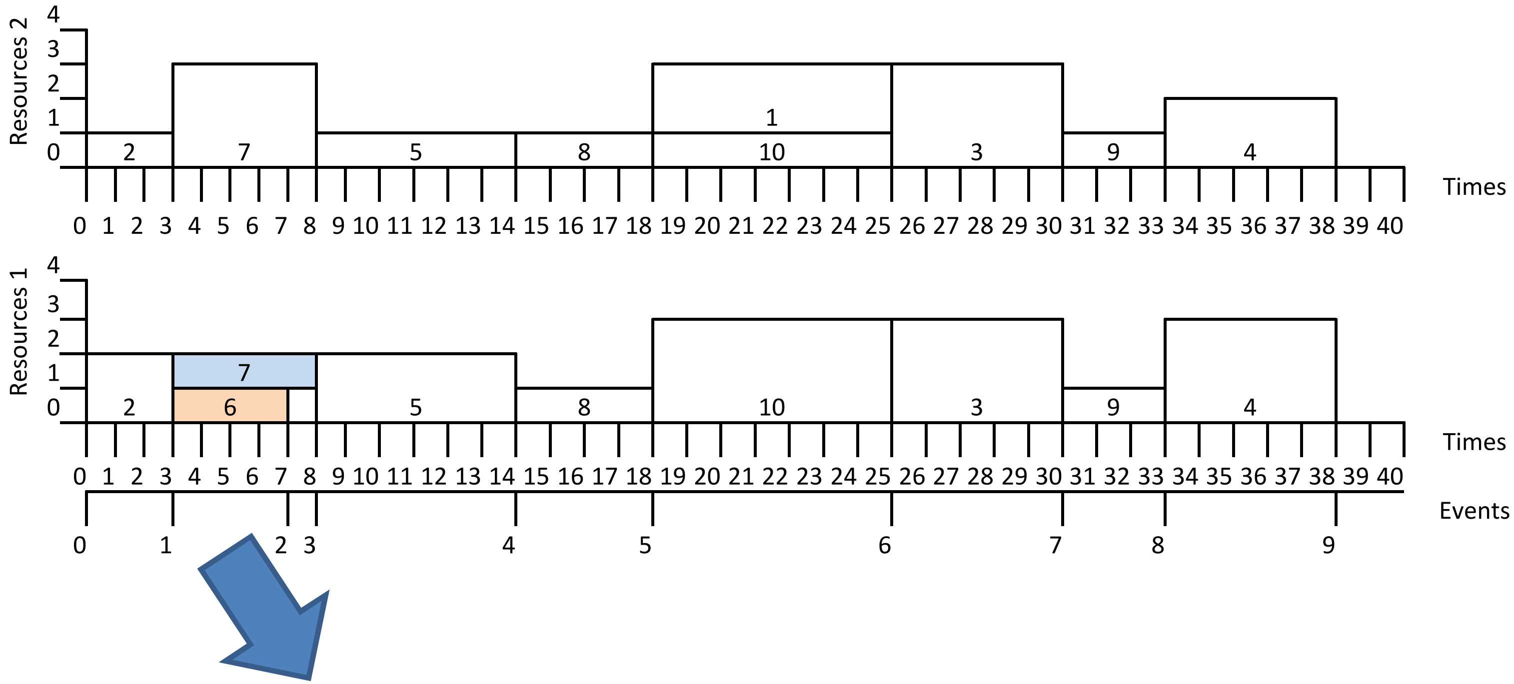
- Permet de traiter des instances comportant des durées non-entières (valable pour FCT,SEE)

  par exemple p_i=3,7

Formulations PLNE basées sur les événements

Formulations	# Var. binaires	# Var. continues	# Contraintes
DT	$(n+2)(T+1)$	0	$\|E\|+(T+1)m+n+2$
DDT	$(n+2)(T+1)$	0	$(T+1)(m+\|E\|)+n+2$
FCT	$(n+2)^2$	$m(n+2)^2+n+2$	$n^3+(m+(15/2)n^2+(4m+(35/2))n+5m+13$
SEE	$2n^2+2n$	$n+1$	$(1/2)n^3+n^2+(3+\|E\|+m)n+\|E\|+m+1$
OOE	n^2	$n+1$	$(1/2)n^3-(1/2)n^2+(3+\|E\|+m)n-2$

Formulations PLNE basées sur les événements



x \ t	2	3	4	5	6	7	8
x_{6t}	0	1	0	0	0	0	0
x_{7t}	0	1	0	0	0	0	0

DT & DDT

	0	1	2	3
x_{6e}	0	1	0	0
y_{6e}	0	0	1	0
x_{7e}	0	1	0	0
y_{7e}	0	0	0	1

SEE

	0	1	2	3
z_{6e}	0	1	0	0
z_{7e}	0	1	1	0

OOE

PLAN DE LA PRESENTATION

- Définitions, généralités sur le RCPSP

- Formulation PLNE pour le RCPSP:
  - Formulation basique à temps discret (DT)
  - Formulation désagrégée à temps discret (DDT)
  - Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT)

- Formulations PLNE basées sur les événements
  - Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)
  - Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

- **Etude comparative**
  - Instances utilisées
  - Conditions de test
  - Résultats

- Crossdocking
  - Définitions
  - Branch & Bound
  - Résultats

- Conclusions et perspectives

Instances

Instances classiques
•KSD30 : psplib, Kolisch,
•BL : Baptiste / Le Pape
•Pack: Carlier / Néron
➔ Insuffisances : durées totales assez courtes, pas toujours le cas en industrie.

•KSD15_d : KSD30 modifiées
•Pack_d : Cumulatives, durée opératoires longues, caractéristiques de l'industrie chimique

	KSD30	BL	PACK	KSD15_d	PACK_d
|A|	32	22 - 27	17 - 35	17	17 - 35
|R|	4	3	2 - 5	4	2 - 5
T	34-130	14-34	23-139	187 -999	644-3694
PR	10	5	19	250	1138

PR= $Max(p_i) / min(p_i)$

Comparaison des 5 modèles testés / résolution exacte des 5 instances

Configuration logicielle et matérielle :

- Solveur de calcul : Ilog-Cplex.
- Configuration de Cplex: par défaut,
- Environnement de programmation : Ilog-Concert, C++,
- Limite de temps : TL = 500 secondes,
- Machine : PC Dell, XEON 5110 bi-processeur 1.6Ghz, 4GB RAM, Fedora.

Etude comparative

Résultats

Opt. Sol.: Solution optimale au bout de 500 sec.

Non-opt.: Sol.: Solution trouvée, pas prouvée optimale

No Sol.: Instances n’ayant pas été résolues au bout de 500 sec.

Total Sol.: Opt. Sol+ Non-opt. Sol.

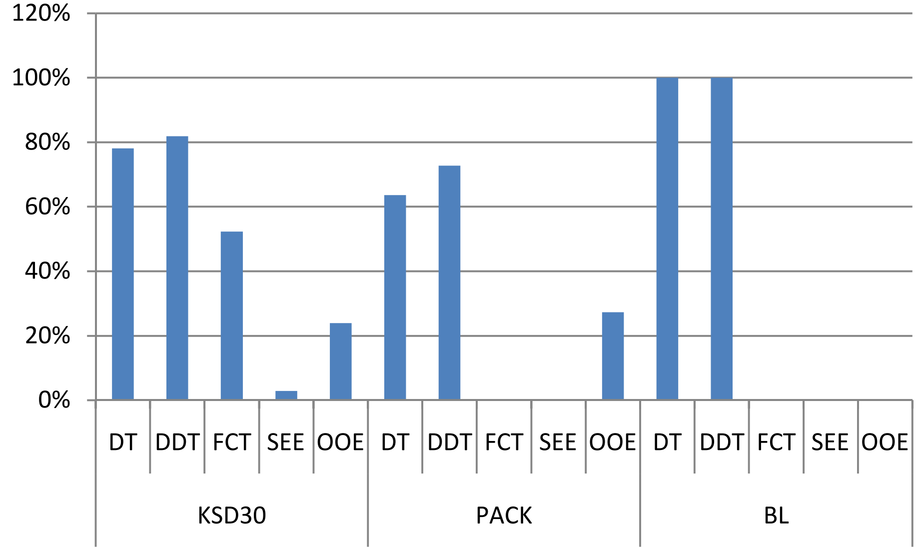
Time : temps de résolution

% : Pourcentage de Opt. Sol ou de Non-opt. Sol ou de No Sol.

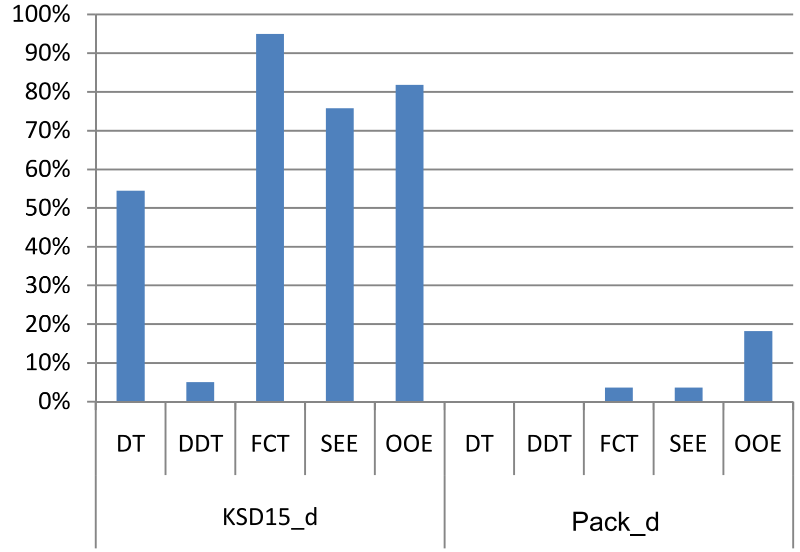
Instances	Formulations	Opt. Sol.		Non-opt. Sol.		Total Sol.	No Sol.
		%	Time	%	Gap	%	%
KSD30	DT	78%	12,76	8%	6%	86%	14%
	DDT	82%	10,45	9%	5%	91%	9%
	FCT	52%	33,81	4%	2%	56%	44%
	SEE	3%	123,62	0%	4%	3%	97%
	OOE	24%	112,62	9%	5%	33%	67%
Pack	DT	64%	37,32	9%	2%	73%	27%
	DDT	73%	61,09	22%	127%	95%	5%
	FCT	0%	0,00	2%	13%	2%	98%
	SEE	0%	0,00	0%	0%	0%	100%
	OOE	27%	20,63	18%	127%	45%	55%
BL	DT	100%	37,93	0%	0%	100%	0%
	DDT	100%	13,68	0%	0%	100%	0%
	FCT	0%	0,00	0%	0%	0%	100%
	SEE	0%	0,00	8%	13%	8%	92%
	OOE	0%	0,00	49%	0%	49%	51%
KSD15_d	DT	55%	6,34	1%	0%	56%	44%
	DDT	5%	1,65	0%	0%	5%	95%
	FCT	95%	7,87	4%	0%	99%	1%
	SEE	76%	10,95	18%	1%	94%	6%
	OOE	82%	2,96	18%	0%	100%	0%
Pack_d	DT	0%	0,00	0%	0%	0%	100%
	DDT	0%	0,00	0%	0%	0%	100%
	FCT	4%	7,58	0%	0%	4%	96%
	SEE	4%	215,08	0%	0%	4%	96%
	OOE	18%	75,58	42%	0%	60%	40%

Etude comparative

Résultats – Solutions optimales



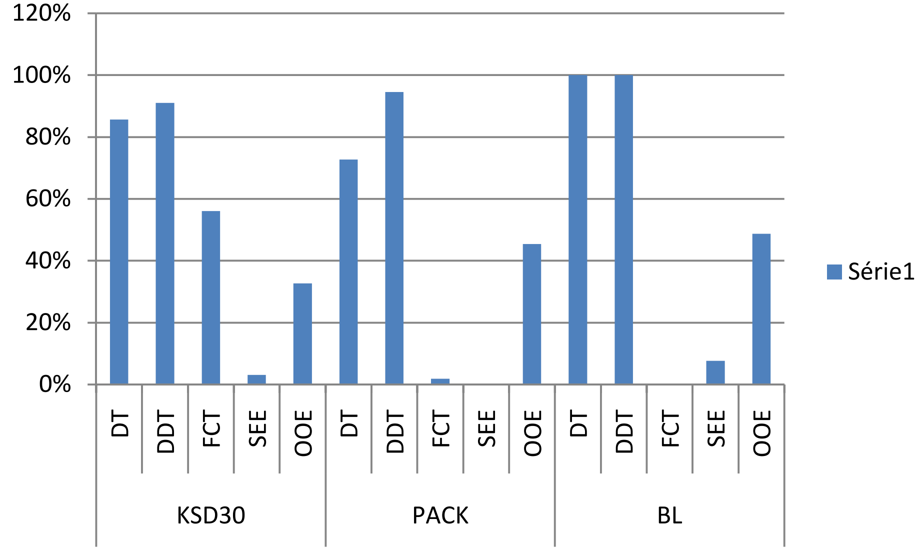
Résultats



Etude comparative

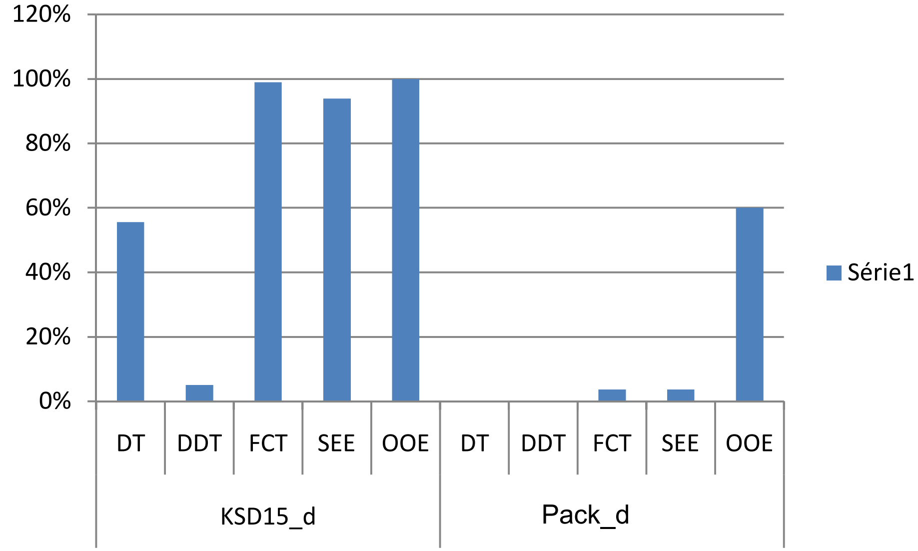
Résultats – Solutions totales
(Sol. optimales + Sol. Non-optimales)

KSD30, Pack, BL



Résultats

KSD15_d, Pack_d



PLAN DE LA PRESENTATION

- Définitions, généralités sur le RCPSP

- Formulation PLNE pour le RCPSP:
  - Formulation basique à temps discret (DT)
  - Formulation désagrégée à temps discret (DDT)
  - Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT)

- Formulations PLNE basées sur les événements
  - Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)
  - Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

- Etude comparative
  - Instances utilisées
  - Conditions de test
  - Résultats

- **Crossdocking**
  - Définitions
  - Branch & Bound
  - Résultats

- Conclusions et perspectives

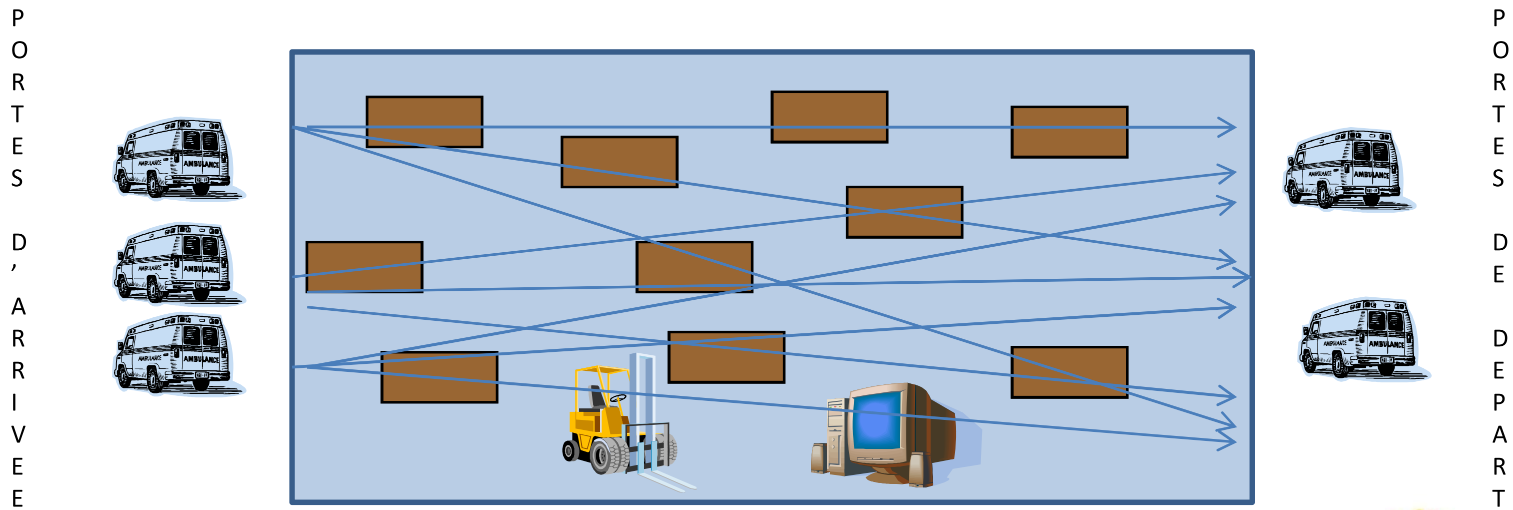
Définition

Technique de logistique visant à réduire :

- Les coûts de stockage
- Les coûts de transport
- Les coûts des opérations de manutentions intermédiaires
- Les délais de livraison

Activité d'une plateforme de cross :

- Dégrouper les marchandises reçues
- Les regrouper selon les destinations
- Durée : moins de 24 heures



Approches de résolution

1. Déterminer la meilleure affectation des camions aux portes d'entrée et de sortie minimisant les coûts dus au déplacement des produits (portes d'entrée → portes de sortie).

2. Déterminer le meilleur ordonnancement des tâches de manutention minimisant les coûts des opérations de manutention.

Notre Approche se situe ici

Objectif : Maximiser le nombre de produits transférés directement du quai d'arrivée au quai de départ.

Hypothèses

Hypothèse 1 :
Tous les camions qui partent, partent pleins

Hypothèse 2 :
Un camion de départ reste au quai jusqu'à ce qu'il soit complètement plein (pas de rotation des remorques sur le stationnement)

Hypothèse 3 :
Un camion d'arrivée reste au quai jusqu'à ce qu'il soit vide (pas de rotation des remorques d'arrivée).

Exemple

10 camions à l'arrivée (I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X), de capacité 10.
10 camions au départ (A,B,C,A,B,C, A,B,C,A), de capacité 10.
1 quai d'entrée ; 1 quai de départ.
3 destinations (A,B, C).

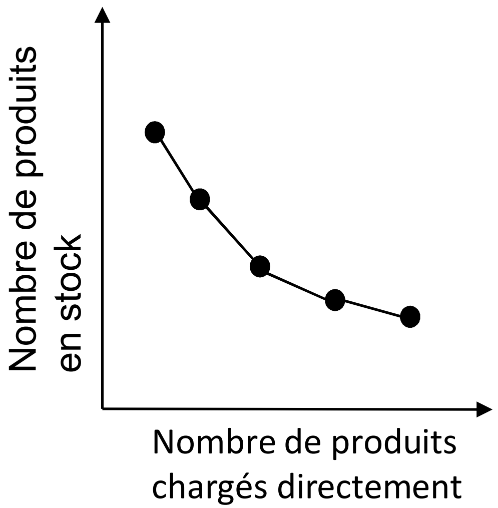
Arrivée	Départ								
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
I	4	3	3	4	3	3	4	3	3
II	1	7	2	1	7	2	1	7	2
III	4	3	3	4	3	3	4	3	3
IV	4	3	3	4	3	3	4	3	3
V	2	4	4	2	4	4	2	4	4
VI	4	2	4	4	2	4	4	2	4
VII	4	3	3	4	3	3	4	3	3
VIII	7	1	2	7	1	2	7	1	2
IX	6	1	3	6	1	3	6	1	3
X	4	3	3	4	3	3	4	3	3
Solutions	Optimal Profit = 62			Second Profit = 37			First Profit = 51		

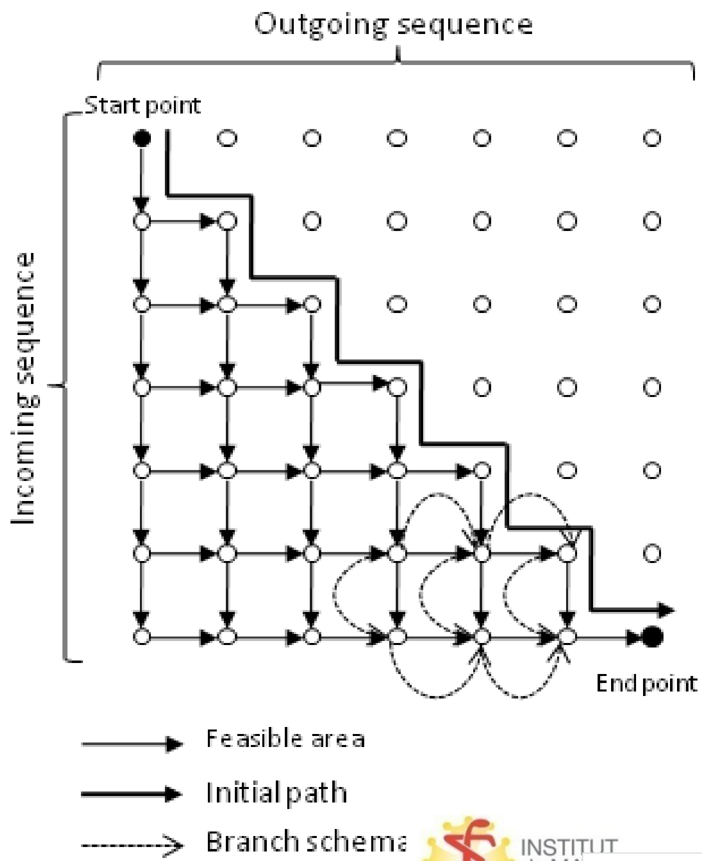
Algorithme

(1) Trouver un chemin réalisable

(2) Schéma de Branchement
- Exécuter la recherche en profondeur d'abord, pour trouver une solution initiale
- Brancher tous les autres nœuds à partir du dernier nœud.

(3) Coupes
- Le chemin non Pareto-optimal est dominé.

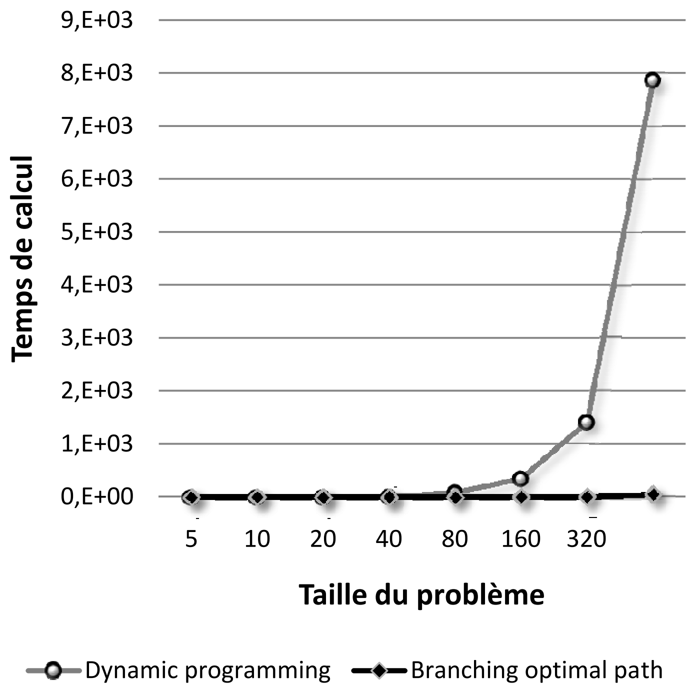




Résultats

Taille du problème	Algorithmes: Programmation Dynamique	BnB
5	10^{-2}	10^{-4}
10	1.1×10^{-2}	10^{-4}
20	3.51×10^{-2}	10^{-3}
40	7.65	8×10^{-3}
80	8.75×10^{1}	6.16×10^{-2}
160	3.45×10^{2}	4.37×10^{-1}
320	1.41×10^{3}	4.07
640	7.85×10^{3}	5.40×10^{1}

Temps moyen d'exécution (Secondes)



PLAN DE LA PRESENTATION

- Définitions, généralités sur le RCPSP

- Formulation PLNE pour le RCPSP:
  - Formulation basique à temps discret (DT)
  - Formulation désagrégée à temps discret (DDT)
  - Formulation à temps continu basée sur les flots (FCT)

- Formulations PLNE basées sur les événements
  - Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)
  - Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)

- Etude comparative
  - Instances utilisées
  - Conditions de test
  - Résultats

- Crossdocking
  - Définitions
  - Branch & Bound
  - Résultats

- **Conclusions et perspectives**

Conclusions

❑ Nous avons proposé deux nouvelles formulations PLNE pour le RCPSP, basées sur la notion d'événements :

- Formulation Start/End basée sur les événements (SEE)
- Formulation On/Off basée sur les événements (OOE)
  - ➢Moins de variables binaires.
  - ➢Adaptée pour des instances comportant de longues durées opératoires.
  - ➢Pouvant traiter des instances comportant des durées opératoires non entières.
  - ➢Obtient les meilleurs résultats, sur les instances fortement cumulatives, à durées opératoires très hétéroclites.

❑ Nous avons proposé un Branch and Bound utilisant des coupes basées sur la frontière de Pareto pour le crossdocking, qui a la capacité de traiter des instances de taille moyenne en un temps minimal.

Perspectives

- ❑Améliorer par des coupes la qualité des relaxations, de la formulation On/Off basée les événements, afin d'accroitre ses performances.

- ❑ Application à l'ordonnancement dans l'industrie du process (industrie chimique par exemple), avec consommation et production d'énergie.

- ❑ Proposer des modèles hybrides à partir utilisant la notion d'événements.

MERCI DE VOTRE ATTENTION