Inversion d'opérateurs diffusifs et application à certains problèmes dynamiques

C. Casenave[1], G. Montseny[1]

[1]Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes,
LAAS -CNRS, Toulouse

Workshop MOCOSY
26 *et* 27 *Mars* 2009

Sommaire

Plan

Principe (1)

Opérateur intégral

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-s)u(s)ds$$

Difficulté propre aux opérateurs intégraux : complexité a priori excessive (du point de vue numérique particulièrement)
$\Longrightarrow$ **nécessité d'une nouvelle formulation de $\mathcal{H}$**

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}u)(t) &= (\mathcal{H}u^t)(t) \text{ où } u^t(s) := \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(s)u(t-s) \text{ (histoire de } u\text{)} \\ &= \left[\mathcal{L}^{-1}(H\mathcal{L}u^t)\right](t) \text{ où } H = \mathcal{L}h\end{aligned}$$

$$(\mathcal{H}u)(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} H(p)\Psi_u(t,p)dp,\ b \geq 0,$$

où $\Psi_u(t,p) := e^{pt}\mathcal{L}u^t(p)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\partial_t\Psi(t,p) = p\Psi(t,p) + u,\ t > 0,\ \Psi(0,p) = 0.$$

Représentation Diffusive

Principe (1)

Opérateur intégral

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-s)u(s)ds$$

Difficulté propre aux opérateurs intégraux : complexité a priori excessive (du point de vue numérique particulièrement)

$\Longrightarrow$ **nécessité d'une nouvelle formulation de $\mathcal{H}$**

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}u)(t) &= (\mathcal{H}u^t)(t) \text{ où } u^t(s) := \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(s)u(t-s) \text{ (histoire de } u\text{)} \\ &= \left[\mathcal{L}^{-1}(H\mathcal{L}u^t)\right](t) \text{ où } H = \mathcal{L}h\end{aligned}$$

$$(\mathcal{H}u)(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} H(p)\Psi_u(t,p)dp,\ b \geq 0,$$

où $\Psi_u(t,p) := e^{pt}\mathcal{L}u^t(p)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\partial_t \Psi(t,p) = p\Psi(t,p) + u,\ t > 0,\ \Psi(0,p) = 0.$$

Principe (1)

Opérateur intégral

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-s)u(s)ds$$

Difficulté propre aux opérateurs intégraux : compléxité a priori excessive (du point de vue numérique particulièrement)

$\Longrightarrow$ **nécessité d'une nouvelle formulation de $\mathcal{H}$**

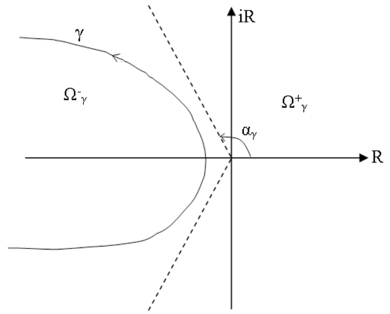
$$\begin{aligned}(\mathcal{H}u)(t) &= (\mathcal{H}u^t)(t) \text{ où } u^t(s) := \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(s)u(t-s) \text{ (histoire de } u\text{)}\\ &= \left[\mathcal{L}^{-1}(H\mathcal{L}u^t)\right](t) \text{ où } H = \mathcal{L}h\end{aligned}$$

$$(\mathcal{H}u)(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} H(p)\Psi_u(t,p)dp,\ b \geq 0,$$

où $\Psi_u(t,p) := e^{pt}\mathcal{L}u^t(p)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\partial_t\Psi(t,p) = p\Psi(t,p) + u,\ t > 0,\ \Psi(0,p) = 0.$$

Principe (2)



Soit γ un arc simple fermé (éventuellement à l'infini) dans $\mathbb{C}^-$ qui vérifie certaines hypothèses non mentionnées ici. On note Ω_γ^+ le domaine extérieur défini par γ, et Ω_γ^- le complémentaire de $\overline{\Omega_\gamma^+}$.

Soit Ω le domaine d'analyticité de H.

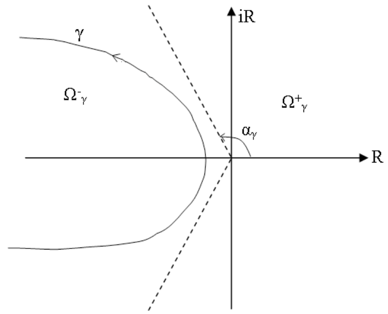
Extension de la formule précédente

Pour $\gamma \subset \Omega$ tel que H holomorphe dans Ω_γ^+, si $H(p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans Ω_γ^+ alors

$$(\mathcal{H}u)(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\tilde{\gamma}} H(p)\Psi_u(t,p)dp = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\gamma}'(\xi)H(\tilde{\gamma}(\xi))\Psi_u(t,\tilde{\gamma}(\xi))d\xi,$$

où $\tilde{\gamma}$ est un arc fermé dans Ω_γ^+ tel que $\gamma \subset \Omega_{\tilde{\gamma}}^-$.

Principe (2)



Soit γ un arc simple fermé (éventuellement à l'infini) dans $\mathbb{C}^-$ qui vérifie certaines hypothèses non mentionnées ici. On note Ω_γ^+ le domaine extérieur défini par γ, et Ω_γ^- le complémentaire de $\overline{\Omega_\gamma^+}$.

Soit Ω le domaine d'analyticité de H.

Extension de la formule précédente

Pour $\gamma \subset \Omega$ tel que H holomorphe dans Ω_γ^+, si $H(p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans Ω_γ^+ alors

$$(\mathcal{H}u)(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\tilde\gamma} H(p)\Psi_u(t,p)dp = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde\gamma'(\xi)H(\tilde\gamma(\xi))\Psi_u(t,\tilde\gamma(\xi))d\xi,$$

où $\tilde\gamma$ est un arc fermé dans Ω_γ^+ tel que $\gamma \subset \Omega_{\tilde\gamma}^-$.

Principe (3)

- En posant $\tilde{\mu} = \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} H \circ \tilde{\gamma}$ et $\tilde{\psi}(t,.) = \Psi_u(t,.) \circ \tilde{\gamma}$, on a $(\mathcal{H}u)(t) = \left\langle \tilde{\mu}, \tilde{\psi}(t,.) \right\rangle$
- Puis, en considérant une suite $\tilde{\gamma}_n \to \gamma$, et en posant

γ-symbole de $\mathcal{H}$

$$\mu = \lim \frac{\tilde{\gamma}_n'}{2i\pi} H \circ \tilde{\gamma}_n,$$

on obtient une représentation d'état (temps-locale) de dimension infinie de l'opérateur intégral $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t,\xi) = \gamma(\xi)\psi(t,\xi) + u(t), \quad \xi \in \mathbb{R}, \ \psi(t_0,.) = 0 \\ (\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu, \psi(t,.) \rangle \end{cases}$$

Avantages :

- équation temps-locale de type diffusif $\Longrightarrow$ approximation simple

- équation d'état universelle pour tous les opérateurs admettant un γ-symbole

Principe (3)

- En posant $\tilde{\mu} = \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} H \circ \tilde{\gamma}$ et $\tilde{\psi}(t,.) = \Psi_u(t,.) \circ \tilde{\gamma}$, on a $(\mathcal{H}u)(t) = \left\langle \tilde{\mu}, \tilde{\psi}(t,.) \right\rangle$
- Puis, en considérant une suite $\tilde{\gamma}_n \to \gamma$, et en posant

γ-symbole de $\mathcal{H}$

$$\mu = \lim \frac{\tilde{\gamma}_n'}{2i\pi} H \circ \tilde{\gamma}_n,$$

on obtient une représentation d'état (temps-locale) de dimension infinie de l'opérateur intégral $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t,\xi) = \gamma(\xi)\psi(t,\xi) + u(t), \quad \xi \in \mathbb{R},\ \psi(t_0,.) = 0 \\ (\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu, \psi(t,.) \rangle \end{cases}$$

Avantages :

- équation temps-locale de type diffusif $\Longrightarrow$ approximation simple

- équation d'état universelle pour tous les opérateurs admettant un γ-symbole

Principe (3)

- En posant $\tilde{\mu} = \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} H \circ \tilde{\gamma}$ et $\tilde{\psi}(t,.) = \Psi_u(t,.) \circ \tilde{\gamma}$, on a $(\mathcal{H}u)(t) = \left\langle \tilde{\mu}, \tilde{\psi}(t,.) \right\rangle$
- Puis, en considérant une suite $\tilde{\gamma}_n \to \gamma$, et en posant

γ-symbole de $\mathcal{H}$

$$\mu = \lim \frac{\tilde{\gamma}_n'}{2i\pi} H \circ \tilde{\gamma}_n,$$

on obtient une représentation d'état (temps-locale) de dimension infinie de l'opérateur intégral $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t,\xi) = \gamma(\xi)\psi(t,\xi) + u(t), \quad \xi \in \mathbb{R}, \ \psi(t_0,.) = 0 \\ (\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu, \psi(t,.) \rangle \end{cases}$$

Avantages :

- équation temps-locale de type diffusif $\Longrightarrow$ approximation simple

- équation d'état universelle pour tous les opérateurs admettant un γ-symbole

Principe (3)

- En posant $\tilde{\mu} = \frac{\tilde{\gamma}'}{2i\pi} H \circ \tilde{\gamma}$ et $\tilde{\psi}(t,.) = \Psi_u(t,.) \circ \tilde{\gamma}$, on a $(\mathcal{H}u)(t) = \left\langle \tilde{\mu}, \tilde{\psi}(t,.) \right\rangle$
- Puis, en considérant une suite $\tilde{\gamma}_n \to \gamma$, et en posant

γ-symbole de $\mathcal{H}$

$$\mu = \lim \frac{\tilde{\gamma}_n'}{2i\pi} H \circ \tilde{\gamma}_n,$$

on obtient une représentation d'état (temps-locale) de dimension infinie de l'opérateur intégral $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t,\xi) = \gamma(\xi)\psi(t,\xi) + u(t), \quad \xi \in \mathbb{R},\ \psi(t_0,.) = 0 \\ (\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu, \psi(t,.) \rangle \end{cases}$$

Avantages *:*

- équation temps-locale de type diffusif $\Longrightarrow$ approximation simple

- équation d'état universelle pour tous les opérateurs admettant un γ-symbole

Espaces des γ-symboles : Δ'_γ $\overset{dualité}{\longleftrightarrow}$ Espaces des ψ :Δ_γ

Δ'_γ est un espace quotient de distributions $\Longrightarrow$ non unicité du γ-symbole,
γ-symbole=classe d'équivalence de distributions

γ-symbole canonique : $\mu = \dfrac{\gamma'}{2i\pi} H_{|\gamma^+}$ (trace à droite au sens des distributions)

propriétés :

- Δ'_γ, Δ_γ espaces complets ; existence de sous espaces de Hilbert de Δ'_γ
- somme, produit par un scalaire sont des opérations continues
- approximations simples, économiques et précises
- si $\#$ est le produit image dans Δ'_γ du produit de composition des opérateurs, alors $(\Delta'_\gamma, \#)$ est une algèbre sans diviseur de 0
- continuité dans Δ'_γ du produit interne $\#$
- nombreuses extensions possibles

Espaces des γ-symboles : Δ_γ' $\overset{dualité}{\longleftrightarrow}$ Espaces des ψ :Δ_γ

Δ_γ' est un espace quotient de distributions $\Longrightarrow$ non unicité du γ-symbole,
γ-**symbole=classe d'équivalence de distributions**

γ-symbole canonique : $\mu = \dfrac{\gamma'}{2i\pi} H_{|\gamma^+}$ (trace à droite au sens des distributions)

propriétés :

- Δ_γ', Δ_γ espaces complets ; existence de sous espaces de Hilbert de Δ_γ'
- somme, produit par un scalaire sont des opérations continues
- approximations simples, économiques et précises
- si $\#$ est le produit image dans Δ_γ' du produit de composition des opérateurs, alors $(\Delta_\gamma', \#)$ est une algèbre sans diviseur de 0
- continuité dans Δ_γ' du produit interne $\#$
- nombreuses extensions possibles

Approximations numériques

Approximation ψ_n de $\psi(t,.)$ par interpolation sur un maillage $\{\xi_k\}$

$$\psi_n(t,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \psi(t,\xi_k)\Lambda_k(\xi), \text{ où } \Lambda_k,\ k=1:n \text{ fonctions d'interpolation.}$$

approximation convergente y_n de $y = \mathcal{H}u$

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \psi(t,\xi_k) \text{ avec } \lambda_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\Lambda_k(\xi)d\xi,$$

et réalisation d'état de dimension finie :

$$\partial_t \psi_k(t) = \gamma_k \psi_k(t) + u(t),\ \ \psi_k(t_0) = 0,\ \ k = 1:n,$$

avec $\psi_k(t) = \psi(t,\xi_k)$ et $\gamma_k = \gamma(\xi_k)$.

Remarque : grâce à la nature diffusive de l'équation, seulement quelques dizaines de ξ_k sont en général nécéssaires pout obtenir une bonne approximation

Approximations numériques

Approximation ψ_n de $\psi(t,.)$ par interpolation sur un maillage $\{\xi_k\}$

$$\psi_n(t,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \psi(t,\xi_k)\Lambda_k(\xi), \text{ où } \Lambda_k,\ k = 1:n \text{ fonctions d'interpolation.}$$

approximation convergente y_n de $y = \mathcal{H}u$

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \psi(t,\xi_k) \text{ avec } \lambda_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\Lambda_k(\xi)d\xi,$$

et réalisation d'état de dimension finie :

$$\partial_t \psi_k(t) = \gamma_k \psi_k(t) + u(t),\ \ \psi_k(t_0) = 0,\ \ k = 1:n,$$

avec $\psi_k(t) = \psi(t,\xi_k)$ et $\gamma_k = \gamma(\xi_k)$.

Remarque : grâce à la nature diffusive de l'équation, seulement quelques dizaines de ξ_k sont en général nécéssaires pout obtenir une bonne approximation

Approximation ψ_n de $\psi(t,.)$ par interpolation sur un maillage $\{\xi_k\}$

$$\psi_n(t,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \psi(t,\xi_k)\Lambda_k(\xi), \text{ où } \Lambda_k,\ k = 1 : n \text{ fonctions d'interpolation.}$$

approximation convergente y_n de $y = \mathcal{H}u$

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \psi(t,\xi_k) \text{ avec } \lambda_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\Lambda_k(\xi)d\xi,$$

et réalisation d'état de dimension finie :

$$\partial_t \psi_k(t) = \gamma_k \psi_k(t) + u(t),\ \ \psi_k(t_0) = 0,\ \ k = 1 : n,$$

avec $\psi_k(t) = \psi(t,\xi_k)$ et $\gamma_k = \gamma(\xi_k)$.

Remarque : grâce à la nature diffusive de l'équation, seulement quelques dizaines de ξ_k sont en général nécéssaires pout obtenir une bonne approximation

Plan

Problématique

But : définir l'image dans l'espace Δ'_γ des γ-symboles de l'inversion d'opérateurs

$\mathcal{H}^{-1}$ opérateur tel que

$$\mathcal{H}^{-1} \circ \mathcal{H} = Id$$

$\longleftrightarrow$

μ^{-1} γ-symbole tel que

$$\mu^{-1} \# \mu = \iota,$$

où ι γ-symbole de l'opérateur identité

Problèmes :

- algèbre Δ'_γ non unitaire
- l'inverse d'un opérateur admettant un γ-symbole dans Δ'_γ n'admet jamais de γ-symbole dans Δ'_γ

$\Longrightarrow$ **nécessité de passer à la sur-algèbre Σ_γ des γ-symboles d'opérateurs γ-diffusifs au sens large,** c'est à dire d'opérateurs $\mathcal{H}$ tels que $\mathcal{H} \circ \partial_t^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$ γ-diffusif au sens strict

Si $\gamma(0) = 0$, Σ_γ est unitaire

Problématique

But : définir l'image dans l'espace Δ'_γ des γ-symboles de l'inversion d'opérateurs

$\mathcal{H}^{-1}$ opérateur tel que

$$\mathcal{H}^{-1} \circ \mathcal{H} = Id$$

$\longleftrightarrow$

μ^{-1} γ-symbole tel que

$$\mu^{-1} \# \mu = \iota,$$

où ι γ-symbole de l'opérateur identité

Problèmes :

- algèbre Δ'_γ non unitaire
- l'inverse d'un opérateur admettant un γ-symbole dans Δ'_γ n'admet jamais de γ-symbole dans Δ'_γ

$\Longrightarrow$ **nécessité de passer à la sur-algèbre Σ_γ des γ-symboles d'opérateurs γ-diffusifs au sens large,** c'est à dire d'opérateurs $\mathcal{H}$ tels que $\mathcal{H} \circ \partial_t^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$ γ-diffusif au sens strict

Si $\gamma(0) = 0$, Σ_γ est unitaire

Problématique

But : définir l'image dans l'espace Δ'_γ des γ-symboles de l'inversion d'opérateurs

$\mathcal{H}^{-1}$ opérateur tel que

$$\mathcal{H}^{-1} \circ \mathcal{H} = Id$$

$\longleftrightarrow$

μ^{-1} γ-symbole tel que

$$\mu^{-1} \# \mu = \iota,$$

où ι γ-symbole de l'opérateur identité

Problèmes :
▶ algèbre Δ'_γ non unitaire
▶ l'inverse d'un opérateur admettant un γ-symbole dans Δ'_γ n'admet jamais de γ-symbole dans Δ'_γ

$\Longrightarrow$ **nécessité de passer à la sur-algèbre Σ_γ des γ-symboles d'opérateurs γ-diffusifs au sens large,** c'est à dire d'opérateurs $\mathcal{H}$ tels que $\mathcal{H} \circ \partial_t^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$ γ-diffusif au sens strict

Si $\gamma(0) = 0$, Σ_γ est unitaire

Dans Σ_γ, on a :

$\mathcal{H}$ opérateur γ-diffusif au sens large	$\longleftrightarrow$	γ-symbole canonique dans Σ_γ : $$\mu = \frac{\gamma'}{2i\pi} H_{\mid\gamma^+}$$
opérateur identité	$\longleftrightarrow$	γ-symbole canonique : $\iota = \frac{\gamma'}{2i\pi} \in \Sigma_\gamma$

$\Longrightarrow$ l'inversion γ-symbolique est donc a priori bien définie dans Σ_γ

γ-symbole canonique dans Σ_γ de $\mathcal{H}^{-1}$ γ-diffusif au sens large

$$\mu^{-1} = \frac{\gamma'}{2i\pi}\left(\frac{1}{H}\right)_{\mid\gamma^+},$$

réalisation diffusive de $\mathcal{H}^{-1}$, avec $\partial_t^{-m} \circ \mathcal{H}^{-1}$ γ-diffusif au sens strict

$$\mathcal{H}^{-1}u = \langle \delta^{\# m} \# \mu^{-1}, \Re \mathrm{d}_\gamma \partial_t^m u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$$

Définition de l'inverse

Dans Σ_γ, on a :

$\mathcal{H}$ opérateur γ-diffusif au sens large	$\longleftrightarrow$	γ-symbole canonique dans Σ_γ : $$\mu = \frac{\gamma'}{2i\pi} H_{\mid\gamma^+}$$
opérateur identité	$\longleftrightarrow$	γ-symbole canonique : $\iota = \frac{\gamma'}{2i\pi} \in \Sigma_\gamma$

$\Longrightarrow$ l'inversion γ-symbolique est donc a priori bien définie dans Σ_γ

γ-symbole canonique dans Σ_γ de $\mathcal{H}^{-1}$ γ-diffusif au sens large

$$\mu^{-1} = \frac{\gamma'}{2i\pi}\left(\frac{1}{H}\right)_{\mid\gamma^+},$$

réalisation diffusive de $\mathcal{H}^{-1}$, avec $\partial_t^{-m} \circ \mathcal{H}^{-1}$ γ-diffusif au sens strict

$$\mathcal{H}^{-1}u = \langle \delta^{\#m} \# \mu^{-1}, \Re \mathrm{d}_\gamma \partial_t^m u \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$$

Définition de l'inverse

Dans Σ_γ, on a :

$\mathcal{H}$ opérateur γ-diffusif au sens large	$\longleftrightarrow$	γ-symbole canonique dans Σ_γ : $$\mu = \frac{\gamma'}{2i\pi} H_{\|\gamma^+}$$
opérateur identité	$\longleftrightarrow$	γ-symbole canonique : $\iota = \frac{\gamma'}{2i\pi} \in \Sigma_\gamma$

$\Longrightarrow$ l'inversion γ-symbolique est donc a priori bien définie dans Σ_γ

γ-symbole canonique dans Σ_γ de $\mathcal{H}^{-1}$ γ-diffusif au sens large

$$\mu^{-1} = \frac{\gamma'}{2i\pi}\left(\frac{1}{H}\right)_{|\gamma^+},$$

réalisation diffusive de $\mathcal{H}^{-1}$, avec $\partial_t^{-m} \circ \mathcal{H}^{-1}$ γ-diffusif au sens strict

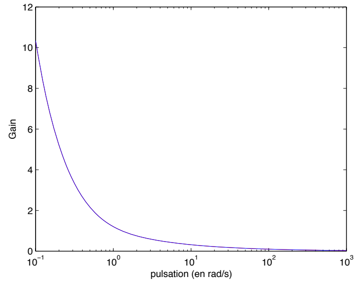
$$\mathcal{H}^{-1} u = \left\langle \delta^{\#m} \# \mu^{-1}, \Re \mathrm{d}_\gamma \partial_t^m u \right\rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$$

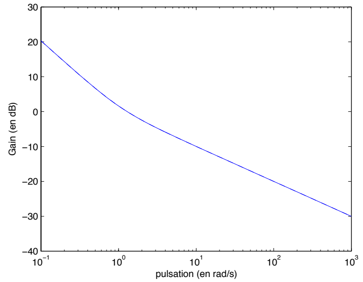
Du point de vue numérique

Remarque importante : l'ensemble des γ-symboles de Σ_γ inversibles dans Σ_γ n'est voisinage d'aucun de ces points

Conséquence : numériquement, le problème d'inversion γ-symbolique nécessitera certaines précautions

Exemple : inversion numérique de $\mathcal{H} = (\sqrt{\partial_t + 1})^{-1}$: tracé de $\partial_t^{-1} \circ (\sqrt{\partial_t + 1})$





Plan

Principe (1)

Modèle :

$$H(\partial_t)x = f(x,u)$$

Objectif : construire des estimations de $H(\partial_t)$ et/ou de f à partir des données bruitées x^*.

Idée : paramétrisation de l'opérateur $H(\partial_t)$, via son γ-symbole, et de la fonction f, via une décomposition sur des fonctions de base
$\Longrightarrow$ problème équivalent, linéaire par rapport aux paramètres à identifier

Hypothèses :
- les opérateurs $H(\partial_t)^{-1}$ et $H(\partial_t) \circ \partial_t^{-1}$ admettent tous deux un γ-symbole ; on note μ le γ-symbole de $H(\partial_t) \circ \partial_t^{-1}$
- $f = \tilde{f} + \bar{f}$ où $\tilde{f}$ est connue et $\bar{f}$ est à identifier

Principe (1)

Modèle :

$$H(\partial_t)x = f(x, u)$$

Objectif : construire des estimations de $H(\partial_t)$ et/ou de f à partir des données bruitées x^*.

Idée : paramétrisation de l'opérateur $H(\partial_t)$, via son γ-symbole, et de la fonction f, via une décomposition sur des fonctions de base
$\Longrightarrow$ problème équivalent, linéaire par rapport aux paramètres à identifier

Hypothèses :
- les opérateurs $H(\partial_t)^{-1}$ et $H(\partial_t) \circ \partial_t^{-1}$ admettent tous deux un γ-symbole ; on note μ le γ-symbole de $H(\partial_t) \circ \partial_t^{-1}$
- $f = \tilde{f} + \bar{f}$ où $\tilde{f}$ est connue et $\bar{f}$ est à identifier

Principe (1)

Modèle :

$$H(\partial_t)x = f(x,u)$$

Objectif : construire des estimations de $H(\partial_t)$ et/ou de f à partir des données bruitées x^*.

Idée : paramétrisation de l'opérateur $H(\partial_t)$, via son γ-symbole, et de la fonction f, via une décomposition sur des fonctions de base
$\Longrightarrow$ problème équivalent, linéaire par rapport aux paramètres à identifier

Hypothèses :
- les opérateurs $H(\partial_t)^{-1}$ et $H(\partial_t)\circ\partial_t^{-1}$ admettent tous deux un γ-symbole ; on note μ le γ-symbole de $H(\partial_t)\circ\partial_t^{-1}$
- $f = \tilde{f} + \bar{f}$ où $\tilde{f}$ est connue et $\bar{f}$ est à identifier

Principe (1)

Modèle :

$$H(\partial_t)x = f(x, u)$$

Objectif : construire des estimations de $H(\partial_t)$ et/ou de f à partir des données bruitées x^*.

Idée : paramétrisation de l'opérateur $H(\partial_t)$, via son γ-symbole, et de la fonction f, via une décomposition sur des fonctions de base
$\Longrightarrow$ problème équivalent, linéaire par rapport aux paramètres à identifier

Hypothèses :
- les opérateurs $H(\partial_t)^{-1}$ et $H(\partial_t) \circ \partial_t^{-1}$ admettent tous deux un γ-symbole ; on note μ le γ-symbole de $H(\partial_t) \circ \partial_t^{-1}$
- $f = \tilde{f} + \bar{f}$ où $\tilde{f}$ est connue et $\bar{f}$ est à identifier

Principe (2)

Paramétrisation de l'opérateur $H(\partial_t)$ **:**

$$y = H(\partial_t)x \overset{\text{RD}}{\rightarrow} y = A_x\,\mu \text{ où } \begin{cases} \mu\ \gamma\text{-symbol de } H(\partial_t) \circ \partial_t^{-1} \\ A_x : \mu \mapsto A_x\,\mu = \langle \mu, \gamma\,\psi_x + x \otimes 1 \rangle \end{cases}$$

Paramétrisation de la fonction f : base topologique $\{\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{k}^j\}$ d'un produit tensoriel d'espaces de Hilbert auquel appartient $\tilde{f}$:

$$f(u,x) = \tilde{f}(u,x) + \sum_{i,j} a_{ij}\,\mathbf{g}^i(u) \otimes \mathbf{k}^j(x)$$

Paramétrisation globale du modèle :

$$A_x\,\mu - \sum_{i,j} \mathbf{g}^i(u)\,\mathbf{k}^j(x)\,a_{ij} = \widetilde{f}(u,x)$$

qui est équivalent à :

$$\mathcal{G}_{u,x}\,\lambda = b \text{ avec } \begin{cases} \mathcal{G}_{u,x} : (\mu, a) \mapsto A_x\,\mu - \sum_{i,j} \mathbf{g}^i(u)\,\mathbf{k}^j(x)\,a_{ij} \\ b = \widetilde{f}(u,x) \\ \lambda = (\mu, a) : \text{ paramètres à identifier} \end{cases}$$

Principe (2)

Paramétrisation de l'opérateur $H(\partial_t)$:

$$y = H(\partial_t)x \overset{\text{RD}}{\to} y = A_x\,\mu \text{ où } \begin{cases} \mu\ \gamma\text{-symbol de } H(\partial_t)\circ\partial_t^{-1} \\ A_x : \mu \mapsto A_x\,\mu = \langle \mu, \gamma\,\psi_x + x\otimes 1\rangle \end{cases}$$

Paramétrisation de la fonction f : base topologique $\{\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{k}^j\}$ d'un produit tensoriel d'espaces de Hilbert auquel appartient $\tilde{f}$:

$$f(u,x) = \tilde{f}(u,x) + \sum_{i,j} a_{ij}\,\mathbf{g}^i(u)\otimes\mathbf{k}^j(x)$$

Paramétrisation globale du modèle :

$$A_x\,\mu - \sum_{i,j} \mathbf{g}^i(u)\,\mathbf{k}^j(x)\,a_{ij} = \widetilde{f}(u,x)$$

qui est équivalent à :

$$\mathcal{G}_{u,x}\,\lambda = b \text{ avec } \begin{cases} \mathcal{G}_{u,x} : (\mu, a) \mapsto A_x\,\mu - \sum_{i,j} \mathbf{g}^i(u)\,\mathbf{k}^j(x)\,a_{ij} \\ b = \widetilde{f}(u,x) \\ \lambda = (\mu, a) : \text{ paramètres à identifier} \end{cases}$$

Principe (2)

Paramétrisation de l'opérateur $H(\partial_t)$:

$$y = H(\partial_t)x \overset{\text{RD}}{\to} y = A_x\,\mu \text{ où } \begin{cases} \mu\ \gamma\text{-symbol de } H(\partial_t)\circ\partial_t^{-1} \\ A_x : \mu \mapsto A_x\,\mu = \langle \mu, \gamma\,\psi_x + x\otimes 1\rangle \end{cases}$$

Paramétrisation de la fonction f : base topologique $\{\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{k}^j\}$ d'un produit tensoriel d'espaces de Hilbert auquel appartient $\tilde{f}$:

$$f(u,x) = \tilde{f}(u,x) + \sum_{i,j} a_{ij}\,\mathbf{g}^i(u)\otimes\mathbf{k}^j(x)$$

Paramétrisation globale du modèle :

$$A_x\,\mu - \sum_{i,j}\mathbf{g}^i(u)\,\mathbf{k}^j(x)\,a_{ij} = \widetilde{f}(u,x)$$

qui est équivalent à :

$$\mathcal{G}_{u,x}\,\lambda = b \text{ avec } \begin{cases} \mathcal{G}_{u,x} : (\mu,a)\mapsto A_x\,\mu - \sum_{i,j}\mathbf{g}^i(u)\,\mathbf{k}^j(x)\,a_{ij} \\ b = \widetilde{f}(u,x) \\ \lambda = (\mu,a) : \text{ paramètres à identifier} \end{cases}$$

Principe (3)

Problématique : identifier $\lambda = (\mu, a)$ à partir des données u et x^*

$\Longrightarrow$problème de minimisation :

$$\min_{\lambda \in \mathcal{E}} \|\mathcal{G}_{u,x^*}\, \lambda - b^*\|^2_{\mathcal{F}}\,, \tag{1}$$

où γ et la base $\{\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{k}^j\}$ sont à choisir en fonction du problème

$\Longrightarrow$ solution obtenue par pseudo-inversion :

$$\lambda^* = \mathcal{G}^{\dagger}_{u,x^*}\, b^*.$$

Du point de vue numérique, on a :

$[\mathcal{G}_{u,x^*}\,(\mu^L, a)](t_n) = \sum_{l=1}^{L} \mu_l^L \left(\gamma(\xi_l^L)\, \psi_{x^*}(t_n, \xi_l^L) + x^*(t_n)\right) - \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \mathbf{g}^i(u(t_n))$

l'opérateur $\mathcal{G}_{u,x^*}$ peut s'exprimer au moyen de la matrice $G_{u,x^*} \in \mathcal{M}^{N, L+I\times J}$ dont le pseudo inverse est classiquement donné par (avec $N \gg L + I \times J$) :

$$G^{\dagger}_{u,x^*} = (G^*_{u,x^*}\, G_{u,x^*})^{-1} G^*_{u,x^*}\,.$$

Principe (3)

Problématique : identifier $\lambda = (\mu, a)$ à partir des données u et x^*

$\Longrightarrow$problème de minimisation :

$$\min_{\lambda \in \mathcal{E}} \|\mathcal{G}_{u,x^*}\, \lambda - b^*\|^2_{\mathcal{F}}\,, \tag{1}$$

où γ et la base $\{\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{k}^j\}$ sont à choisir en fonction du problème

$\Longrightarrow$ solution obtenue par pseudo-inversion :

$$\lambda^* = \mathcal{G}^{\dagger}_{u,x^*}\, b^*.$$

Du point de vue numérique, on a :

$[\mathcal{G}_{u,x^*}\,(\mu^L, a)](t_n) = \sum_{l=1}^{L} \mu_l^L\,(\gamma(\xi_l^L)\,\psi_{x^*}(t_n, \xi_l^L) + x^*(t_n)) - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \mathbf{g}^i(u(t_n))$

l'opérateur $\mathcal{G}_{u,x^*}$ peut s'exprimer au moyen de la matrice $G_{u,x^*} \in \mathcal{M}^{N, L+I\times J}$ dont le pseudo inverse est classiquement donné par (avec $N \gg L + I \times J$) :

$$G^{\dagger}_{u,x^*} = (G^*_{u,x^*}\, G_{u,x^*})^{-1}\, G^*_{u,x^*}.$$

Principe (3)

Problématique : identifier $\lambda = (\mu, a)$ à partir des données u et x^*

$\Longrightarrow$problème de minimisation :

$$\min_{\lambda \in \mathcal{E}} \|\mathcal{G}_{u,x^*}\, \lambda - b^*\|^2_{\mathcal{F}}\,, \tag{1}$$

où γ et la base $\{\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{k}^j\}$ sont à choisir en fonction du problème

$\Longrightarrow$ solution obtenue par pseudo-inversion :

$$\lambda^* = \mathcal{G}^{\dagger}_{u,x^*}\, b^*.$$

Du point de vue numérique, on a :

$[\mathcal{G}_{u,x^*}\,(\mu^L, a)](t_n) = \sum_{l=1}^{L} \mu_l^L \left(\gamma(\xi_l^L)\, \psi_{x^*}(t_n, \xi_l^L) + x^*(t_n)\right) - \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \mathbf{g}^i(u(t_n))$

l'opérateur $\mathcal{G}_{u,x^*}$ peut s'exprimer au moyen de la matrice $G_{u,x^*} \in \mathcal{M}^{N, L+I\times J}$ dont le pseudo inverse est classiquement donné par (avec $N \gg L + I \times J$) :

$$G^{\dagger}_{u,x^*} = (G^*_{u,x^*}\, G_{u,x^*})^{-1} G^*_{u,x^*}.$$

Principe (3)

Problématique : identifier $\lambda = (\mu, a)$ à partir des données u et x^*

$\Longrightarrow$problème de minimisation :

$$\min_{\lambda \in \mathcal{E}} \|\mathcal{G}_{u,x^*}\, \lambda - b^*\|^2_{\mathcal{F}}\,, \qquad (1)$$

où γ et la base $\{\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{k}^j\}$ sont à choisir en fonction du problème

$\Longrightarrow$ solution obtenue par pseudo-inversion :

$$\lambda^* = \mathcal{G}^{\dagger}_{u,x^*}\, b^*.$$

Du point de vue numérique, on a :

$[\mathcal{G}_{u,x^*}\,(\mu^L, a)](t_n) = \sum_{l=1}^{L} \mu_l^L \left(\gamma(\xi_l^L)\,\psi_{x^*}(t_n, \xi_l^L) + x^*(t_n)\right) - \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \mathbf{g}^i(u(t_n))$

l'opérateur $\mathcal{G}_{u,x^*}$ peut s'exprimer au moyen de la matrice $G_{u,x^*} \in \mathcal{M}^{N, L+I\times J}$ dont le pseudo inverse est classiquement donné par (avec $N \gg L + I \times J$) :

$$G^{\dagger}_{u,x^*} = (G^*_{u,x^*}\, G_{u,x^*})^{-1} G^*_{u,x^*}.$$

Principe (4)

Quelques remarques :

- **Biais** : $\mathcal{G}_{u,x^*}$ dépend du bruit de mesure $\Longrightarrow$ l'estimateur λ^* de λ est biaisé
- **Simulation du modèle identifié** :

Le modèle identifié est donné par :

$$H^*(\partial_t)x = f^*(u,x)$$

où H^* et f^* sont déduits des paramètres identifiés λ^*.
On a donc $x = H^*(\partial_t)^{-1}f^*(u,x)$ que l'on peut simuler au moyen de la représentation diffusive :

$$\begin{cases} \partial_t\psi = \gamma\,\psi + f^*\left(u, \langle\delta\,\sharp\,\mu^{*-1}, \psi\rangle\right), \; \psi(0,.) = 0 \\ x = \langle\delta\,\sharp\,\mu^{*-1}, \psi\rangle. \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ nécéssité de l'inversion γ-symbolique.

Principe (4)

Quelques remarques :

- **Biais** : $\mathcal{G}_{u,x^*}$ dépend du bruit de mesure $\Longrightarrow$ l'estimateur λ^* de λ est biaisé
- **Simulation du modèle identifié** :

Le modèle identifié est donné par :

$$H^*(\partial_t)x = f^*(u,x)$$

où H^* et f^* sont déduits des paramètres identifiés λ^*.
On a donc $x = H^*(\partial_t)^{-1}f^*(u,x)$ que l'on peut simuler au moyen de la représentation diffusive :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t\psi = \gamma\,\psi + f^*\left(u, \langle \delta \sharp \mu^{*-1}, \psi \rangle\right),\ \psi(0,.) = 0 \\ x = \langle \delta \sharp \mu^{*-1}, \psi \rangle. \end{array} \right.$$

$\Longrightarrow$ nécéssité de l'inversion γ-symbolique.

Principe (4)

Quelques remarques :

▶ **Biais** : $\mathcal{G}_{u,x^*}$ dépend du bruit de mesure $\Longrightarrow$ l'estimateur λ^* de λ est biaisé

▶ **Simulation du modèle identifié** :
Le modèle identifié est donné par :

$$H^*(\partial_t)x = f^*(u, x)$$

où H^* et f^* sont déduits des paramètres identifiés λ^*.
On a donc $x = H^*(\partial_t)^{-1}f^*(u, x)$ que l'on peut simuler au moyen de la représentation diffusive :

$$\begin{cases} \partial_t\psi = \gamma\,\psi + f^*\left(u, \langle \delta \,\sharp\, \mu^{*-1}, \psi \rangle\right), \; \psi(0,.) = 0 \\ x = \langle \delta \,\sharp\, \mu^{*-1}, \psi \rangle . \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ nécéssité de l'inversion γ-symbolique.

Principe (4)

Quelques remarques :

- **Biais** : $\mathcal{G}_{u,x^*}$ dépend du bruit de mesure $\Longrightarrow$ l'estimateur λ^* de λ est biaisé
- **Simulation du modèle identifié** :

Le modèle identifié est donné par :

$$H^*(\partial_t)x = f^*(u,x)$$

où H^* et f^* sont déduits des paramètres identifiés λ^*.
On a donc $x = H^*(\partial_t)^{-1}f^*(u,x)$ que l'on peut simuler au moyen de la représentation diffusive :

$$\begin{cases} \partial_t\psi = \gamma\,\psi + f^*\left(u, \langle \delta \sharp \mu^{*-1}, \psi\rangle\right), \; \psi(0,.) = 0 \\ x = \langle \delta \sharp \mu^{*-1}, \psi\rangle . \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ nécéssité de l'inversion γ-symbolique.

Application (1) : système considéré

Système : équation de flamme sphérique de Joulin, où $x(t)$ représente le rayon de la flamme à un temps $t > 0$:

$$x\, \partial_t^{\frac{1}{2}} x = 2\, x \ln x + 2\, u,\; x(0) = 0, u \geqslant 0, x \geqslant 0. \tag{2}$$

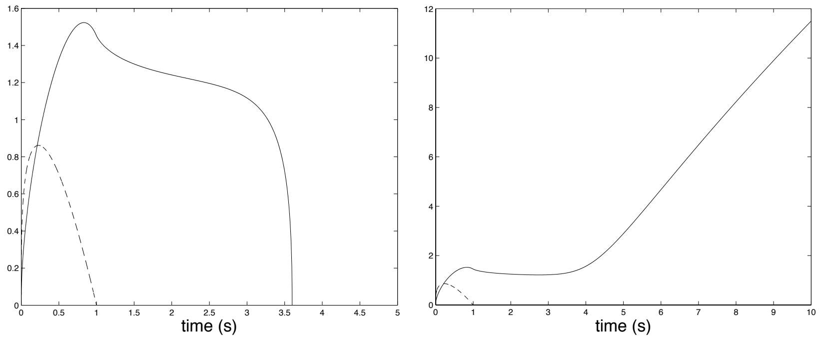
- seuil de bifurcation : la flamme soit explose, soit s'éteint $\Longrightarrow$ difficulté pour l'identification

Application (1) : système considéré

Système : équation de flamme sphérique de Joulin, où $x(t)$ représente le rayon de la flamme à un temps $t > 0$:

$$x\,\partial_t^{\frac{1}{2}} x = 2\,x \ln x + 2\,u,\ x(0) = 0, u \geqslant 0, x \geqslant 0. \tag{2}$$

▶ seuil de bifurcation : la flamme soit explose, soit s'éteint $\Longrightarrow$ difficulté pour l'identification



Application (2) : problème d'identification

Modèle d'identification :

$$H(\partial_t)x = 2\tfrac{u}{x} + 2\,k(x) \text{ où } H(\partial_t) \text{ et } k \text{ sont à identifier.}$$

Paramétrisation:

$$k(x) = \sum_j a_j\,\mathbf{k}^j(x) \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{k}^j(x) = x^{j-1}$$

$$\text{et } H(\partial_t)x = A_x\,\mu \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma(\xi) = |\xi|\; e^{i\,\mathrm{sign}(\xi)\frac{3\pi}{4}} \\ L = 20 \text{ valeurs } \xi_l^L \text{ (couvrant 4 décades)} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ problème de la forme (1) avec $b = 2\dfrac{u}{x^*}$.

Application (2) : problème d'identification

Modèle d'identification :

$$H(\partial_t)x = 2\tfrac{u}{x} + 2\,k(x) \text{ où } H(\partial_t) \text{ et } k \text{ sont à identifier.}$$

Paramétrisation:

$$k(x) = \sum_j a_j\,\mathbf{k}^j(x) \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{k}^j(x) = x^{j-1}$$

$$\text{et } H(\partial_t)x = A_x\,\mu \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma(\xi) = |\xi|\ e^{i\,\mathrm{sign}(\xi)\frac{3\pi}{4}} \\ L = 20 \text{ valeurs } \xi_l^L \text{ (couvrant 4 décades)} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ problème de la forme (1) avec $b = 2\dfrac{u}{x^*}$.

Application (2) : problème d'identification

Modèle d'identification :

$$H(\partial_t)x = 2\tfrac{u}{x} + 2\,k(x) \text{ où } H(\partial_t) \text{ et } k \text{ sont à identifier.}$$

Paramétrisation:

$$k(x) = \sum_j a_j\,\mathbf{k}^j(x) \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{k}^j(x) = x^{j-1}$$

$$\text{et } H(\partial_t)x = A_x\,\mu \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma(\xi) = |\xi|\; e^{i\,\mathrm{sign}(\xi)\frac{3\pi}{4}} \\ L = 20\,\text{valeurs } \xi_l^L \text{ (couvrant 4 décades)} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ problème de la forme (1) avec $b = 2\dfrac{u}{x^*}$.

Application (2) : problème d'identification

Modèle d'identification :

$$H(\partial_t)x = 2\tfrac{u}{x} + 2\,k(x) \text{ où } H(\partial_t) \text{ et } k \text{ sont à identifier.}$$

Paramétrisation:

$$k(x) = \sum_j a_j\,\mathbf{k}^j(x) \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{k}^j(x) = x^{j-1}$$

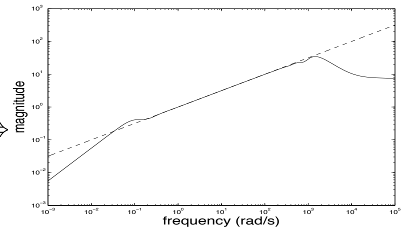
$$\text{et } H(\partial_t)x = A_x\,\mu \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma(\xi) = |\xi|\; e^{i\,\mathrm{sign}(\xi)\frac{3\pi}{4}} \\ L = 20\,\text{valeurs } \xi_l^L \text{ (couvrant 4 décades)} \end{cases}$$

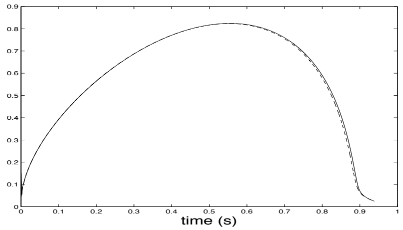
$\Longrightarrow$ problème de la forme (1) avec $b = 2\dfrac{u}{x^*}$.

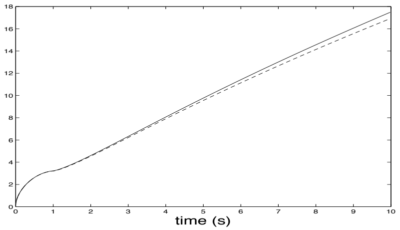
Application (3) : résultats numériques

- On suppose k connue et on identifie $H(\partial_t)$

$\left.\begin{array}{c}\text{réponse fréquentielles } H(i\omega) \\ \text{exacte (- -) et identifiée (-)}\end{array}\right\} \Longrightarrow$







Evolution de x pour les modèles exact (- -) et identifié (—).

Application (4) : résultats numériques

- On identifie à la fois k et $H(\partial_t)$

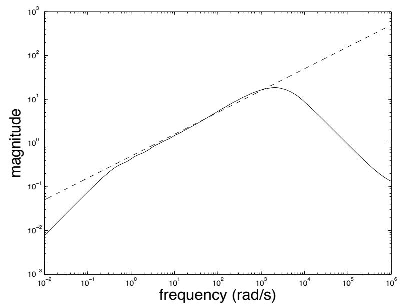


Fig.: Réponses fréquentielles $H(i\omega)$ exacte(- -) et identifiée(—)

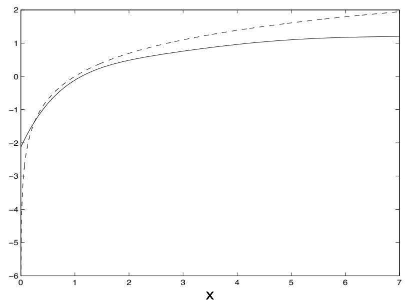


Fig.: Fonction k exacte(- -) et identifiée(—)