

Hélicoptère à 3 degrés de liberté : MODÈLES

Dimitri Peaucelle

13th June 2005

1 Modèle non linéaire 3D

Les hypothèses de travail sont que :

- Les couples gyroscopiques des paires moteurs/hélices sont négligés.
- Les inerties des moteurs et les dynamiques des flux d'airs sont négligés.
- La perte d'efficacité des forces de portance lors des déplacements est négligée.
- Les frottements secs sont négligés.

Soit Ξ le vecteur d'état dans le repère fixe (variables mesurées) :

$$\Xi = \begin{pmatrix} \theta \\ \lambda \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

où θ est le pitch, λ le travel et ϵ l'élévation. Soit maintenant ω le vecteur des vitesses de rotation du repère mobile de l'hélico (qui tourne avec λ et ϵ mais pas suivant θ). Voir figure 1.

On a d'après les formules d'Euler:

$$\dot{\Xi} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_1 \sin \epsilon + \omega_2 \cos \epsilon \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\lambda} / \cos \epsilon - \dot{\theta} \tan \epsilon \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix}$$

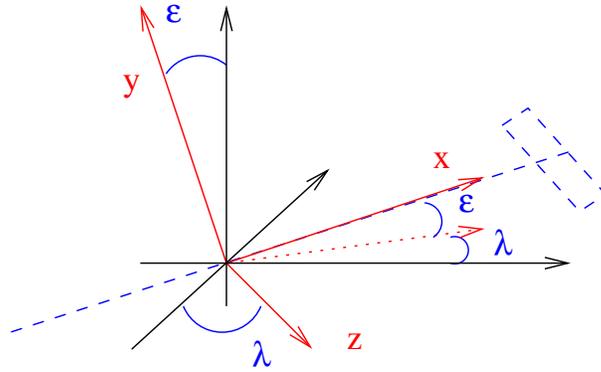


Figure 1: Repères fixe et mobile

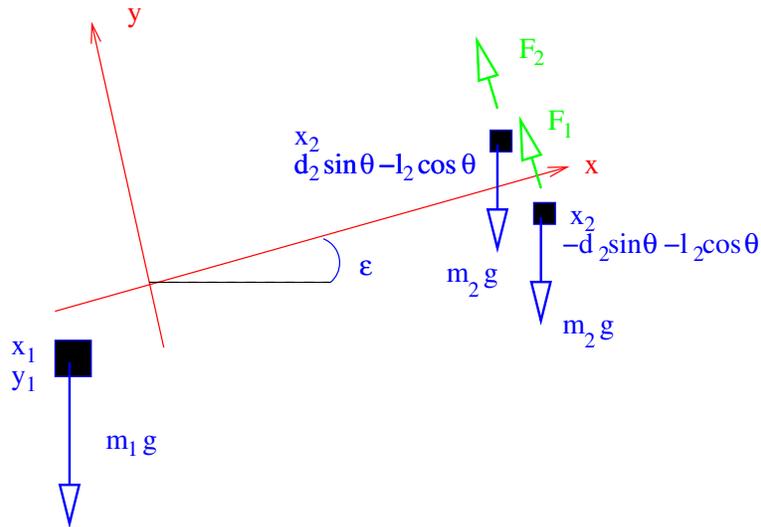


Figure 2: Forces principales

Dans le repère mobile les équations de la mécanique donnent:

$$J\dot{\omega} + (J\omega) \wedge \omega = M_1 + M_{21} + M_{22} + M_{31} + M_{32} - C\omega$$

Avec les données suivantes

- J est le tenseur d'inertie de l'engin
- C caractérise les frottements visqueux

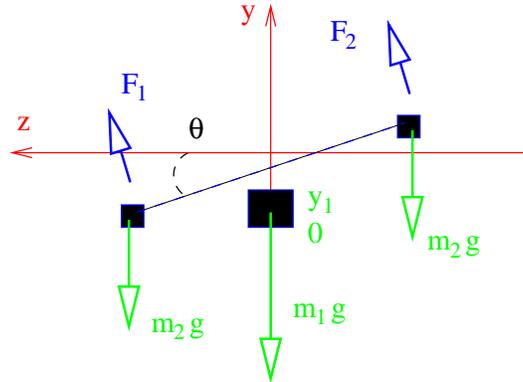


Figure 3: Forces principales

- Moment de la force de gravité de la barre

$$M_1 = m_1 g X_1 \wedge \begin{pmatrix} -\sin \epsilon \\ -\cos \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec la position du centre de gravité de la barre :

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

X_1 dépend de la position de la masse variable et à priori $x_1 < 0$ et $y_1 < 0$.

Le calcul donne :

$$M_1 = m_1 g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_1 \cos \epsilon + y_1 \sin \epsilon \end{pmatrix}$$

- Moment des forces de gravité des moteurs

$$M_{2i} = m_{2i} g X_{2i} \wedge \begin{pmatrix} -\sin \epsilon \\ -\cos \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec la position du centre de gravité des moteurs :

$$X_{21} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -d_2 \sin \theta - l_2 \cos \theta \\ d_2 \cos \theta - l_2 \sin \theta \end{pmatrix} \quad X_{22} = \begin{pmatrix} x_2 \\ +d_2 \sin \theta - l_2 \cos \theta \\ -d_2 \cos \theta - l_2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

On notera que à priori $1 \gg l_2 > 0$.

Le calcul de la somme des moments des poids des moteurs donne:

$$M_{21} + M_{22} = 2m_2g \begin{pmatrix} -l_2 \sin \theta \cos \epsilon \\ l_2 \sin \theta \sin \epsilon \\ -x_2 \cos \epsilon - l_2 \cos \theta \sin \epsilon \end{pmatrix}$$

- Moment des forces de portance développées par les moteurs

$$M_{3i} = F_i X_{3i} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

avec X_{3i} le point où s'applique la force (même distance que les poids suivant le corps de l'hélico mais éventuellement déplacé vers le haut):

$$X_{31} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -d_2 \sin \theta - l_3 \cos \theta \\ d_2 \cos \theta - l_3 \sin \theta \end{pmatrix} \quad X_{32} = \begin{pmatrix} x_2 \\ d_2 \sin \theta - l_3 \cos \theta \\ -d_2 \cos \theta - l_3 \sin \theta \end{pmatrix}$$

Par le calcul on trouve

$$M_{31} + M_{32} = \begin{pmatrix} d_2(F_2 - F_1) \\ -x_2 \sin \theta (F_2 + F_1) \\ x_2 \cos \theta (F_2 + F_1) \end{pmatrix} .$$

La somme des moments des forces, hors forces de frottement visqueux, donne:

$$\begin{aligned} & M_1 + M_{21} + M_{22} + M_{31} + M_{32} \\ &= \begin{pmatrix} -2m_2gl_2 \sin \theta \cos \epsilon & +d_2(F_2 - F_1) \\ 2m_2gl_2 \sin \theta \sin \epsilon - x_2 \sin \theta (F_2 + F_1) \\ -m_1g(x_1 \cos \epsilon - y_1 \sin \epsilon) - 2m_2g(x_2 \cos \epsilon + l_2 \cos \theta \sin \epsilon) + x_2 \cos \theta (F_2 + F_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations on prend

$$\begin{aligned} \alpha \sin(\epsilon - \epsilon_0) &= -m_1g(x_1 \cos \epsilon - y_1 \sin \epsilon) - 2m_2gx_2 \cos \epsilon \\ \beta &= 2m_2gl_2 . \end{aligned}$$

On note que α et ϵ_0 dépendent de la position du centre de masse de la barre et donc de la position de la masse mobile.

$$\begin{aligned} & M_1 + M_{21} + M_{22} + M_{31} + M_{32} \\ &= \begin{pmatrix} -\beta \sin \theta \cos \epsilon & +d_2(F_2 - F_1) \\ \beta \sin \theta \sin \epsilon - x_2 \sin \theta (F_2 + F_1) \\ -\alpha \sin(\epsilon - \epsilon_0) - \beta \cos \theta \sin \epsilon + x_2 \cos \theta (F_2 + F_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2 Hypothèse de J et C diagonales

Si on suppose que la matrice des inerties est diagonale (pas de couplages inertiels entre les axes):

$$J\dot{\omega} + (J\omega) \wedge \omega = \begin{pmatrix} J_1\dot{\omega}_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3 \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 \end{pmatrix}$$

De même pour les frottements visqueux:

$$C\omega = \begin{pmatrix} C_1\omega_1 \\ C_2\omega_2 \\ C_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

3 Hypothèse de $|\epsilon| \ll 1$

L'élévation est contrainte à être proche de 0 (à 20° près environ). Nous envisageons donc de faire suivant les cas les approximations suivantes:

$$\begin{aligned} \sin \epsilon &\simeq \epsilon \simeq 0 \\ \tan \epsilon &\simeq \epsilon \simeq 0 \\ \cos \epsilon &\simeq 1 \end{aligned}$$

Pour les vitesses de rotation du repère mobile cela donne :

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\lambda} / \cos \epsilon - \dot{\theta} \tan \epsilon \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\lambda} - \dot{\theta} \epsilon \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix}$$

Pour ce qui est des moments des autres forces il faut noter que $l_2 \ll 1$, donc pour les petits angles $l_2 \sin \epsilon \simeq 0$ est une approximation assez légitime. De plus il faut noter que $\epsilon_0 \simeq 0$ dans la configuration choisie (et même $\epsilon_0 = 0$ quand la masse mobile est située au plus près de l'axe de rotation en λ).

$$\begin{aligned} &M_1 + M_{21} + M_{22} + M_{31} + M_{32} \\ &= \begin{pmatrix} -\beta \sin \theta \cos \epsilon + d_2(F_2 - F_1) \\ \beta \sin \theta \sin \epsilon - x_2 \sin \theta (F_2 + F_1) \\ -\alpha \sin(\epsilon - \epsilon_0) - \beta \cos \theta \sin \epsilon + x_2 \cos \theta (F_2 + F_1) \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} -\beta \sin \theta + d_2(F_2 - F_1) \\ -x_2 \sin \theta (F_2 + F_1) \\ -\alpha \epsilon + x_2 \cos \theta (F_2 + F_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

À ce stade les équations dynamiques avec le plus d'approximations donnent

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta} + (J_2 - J_3) \dot{\epsilon} \dot{\lambda} &= -\beta \sin \theta + d_2(F_2 - F_1) - C_1 \dot{\theta} \\ J_2 \ddot{\lambda} + (J_3 - J_1) \dot{\epsilon} \dot{\theta} &= -x_2 \sin \theta (F_2 + F_1) - C_2 \dot{\lambda} \\ J_3 \ddot{\epsilon} + (J_1 - J_2) \dot{\theta} \dot{\lambda} &= -\alpha \epsilon + x_2 \cos \theta (F_2 + F_1) - C_3 \dot{\epsilon} \end{aligned}$$

Si on suppose que l'on agit axe par axe sans bouger les autres (ce qui est bien difficile quand on veut faire du travel, mais bon on fait l'hypothèse quand même) alors on a :

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta} &= -\beta \sin \theta + d_2(F_2 - F_1) - C_1 \dot{\theta} \\ J_2 \ddot{\lambda} &= -x_2 \sin \theta (F_2 + F_1) - C_2 \dot{\lambda} \\ J_3 \ddot{\epsilon} &= -\alpha \epsilon + x_2 \cos \theta (F_2 + F_1) - C_3 \dot{\epsilon} \end{aligned}$$

4 Hypothèse de $|\theta| \ll 1$

Cette dernière hypothèse est peu valable car θ peut varier de $+90^\circ$ à -90° . Cependant dans l'objectif de faire une identification, il est possible de faire l'hypothèse. On trouve alors le modèle presque linéaire suivant :

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta} &= -\beta \theta + d_2(F_2 - F_1) - C_1 \dot{\theta} \\ J_2 \ddot{\lambda} &= -x_2 \theta (F_2 + F_1) - C_2 \dot{\lambda} \\ J_3 \ddot{\epsilon} &= -\alpha \epsilon + x_2 (F_2 + F_1) - C_3 \dot{\epsilon} \end{aligned}$$

5 Se placer dans une zone de fonctionnement des moteurs

On remarque que la force exercée par les moteurs est en première approximation linéaire par morceaux en la tension de commande:

$$F_i = K(V_i) = \begin{cases} \bar{V} & : \text{ si } V_i \geq \bar{V} \\ K_+ V_i & : \text{ si } \tilde{V} \leq V_i \leq \bar{V} \\ 0 & : \text{ si } -\tilde{V} \leq V_i \leq \tilde{V} \\ K_- V_i & : \text{ si } -\tilde{V} \geq V_i \geq -\bar{V} \\ -\bar{V} & : \text{ si } V_i \leq -\bar{V} \end{cases}$$

On se place dans le cas où $F_i = K_+ V_i$ pour faire de l'identification. Les équations sont

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta} &= -\beta \theta + d_2 K_+ (V_2 - V_1) - C_1 \dot{\theta} \\ J_2 \ddot{\lambda} &= -x_2 K_+ \theta (V_2 + V_1) - C_2 \dot{\lambda} \\ J_3 \ddot{\epsilon} &= -\alpha \epsilon + x_2 K_+ (V_2 + V_1) - C_3 \dot{\epsilon} \end{aligned}$$

et elles correspondent avec celle utilisées par Mounira Bouarroudj. De son travail, on tire les ordres de grandeur suivants:

$J_1 = 0.01$	$\beta = 0.04$	$d_2 K_+ = 0.07$	$C_1 = 0.001$
$J_2 = 4.5$		$x_2 K_+ = 0.5$	$C_2 = 0.4$
$J_3 = 0.07$	$\alpha = 0.2$	$x_2 K_+ = 0.5$	$C_3 = 0.01$

6 Hypothèse de $|\epsilon| \leq \bar{\epsilon} < \pi/4$

Récrivons les différentes équations :

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} + (J\omega) \wedge \omega &= -C\omega + \begin{pmatrix} -\beta \sin \theta \cos \epsilon & +d_2(F_2 - F_1) \\ \beta \sin \theta \sin \epsilon - x_2 \sin \theta (F_2 + F_1) \\ -\alpha \sin(\epsilon - \epsilon_0) - \beta \cos \theta \sin \epsilon + x_2 \cos \theta (F_2 + F_1) \end{pmatrix} \\ \dot{\Xi} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin \epsilon & \cos \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \omega \end{aligned}$$

Pour la suite on suppose J diagonale, $(J\omega) \wedge \omega = 0$. L'élévation est contrainte à être proche de 0 à $\bar{\epsilon} < \pi/6$. Nous envisageons donc d'introduire les incertitudes suivantes (elles varient dans le temps et leur variation peut se caractériser en fonction des dérivées de Ξ) :

$$\begin{aligned} \sin \epsilon &\simeq (1 - \delta_{\epsilon 1})\epsilon & , & \quad 0 \leq \delta_{\epsilon 1} \leq 1 - \sin \bar{\epsilon} / \bar{\epsilon} \\ \sin \epsilon &\simeq \delta_{\epsilon 2} & , & \quad |\delta_{\epsilon 2}| \leq \sin \bar{\epsilon} \\ \cos \epsilon &\simeq 1 - \delta_{\epsilon 3} & , & \quad 0 \leq \delta_{\epsilon 3} \leq 1 - \cos \bar{\epsilon} \end{aligned}$$

Les équations dynamique s'écrivent alors comme suit

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} + (J\omega) \wedge \omega &= -C\omega + \begin{pmatrix} -\beta(1 - \delta_{\epsilon 3}) \sin \theta & +d_2(F_2 - F_1) \\ \beta \delta_{\epsilon 2} \sin \theta - x_2 \sin \theta (F_2 + F_1) \\ -\alpha(1 - \delta_{\epsilon 1})(\epsilon - \epsilon_0) - \beta \cos \theta (1 - \delta_{\epsilon 1})\epsilon + x_2 \cos \theta (F_2 + F_1) \end{pmatrix} \\ \dot{\Xi} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta_{\epsilon 2} & 1 - \delta_{\epsilon 3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \omega \end{aligned}$$

7 Hypothèse de $|\theta| \leq \bar{\theta} < \pi/2$

L'hypothèse de θ proche de 0 est peu valable car θ peut varier de $+90^\circ$ à -90° . Cependant il est envisageable de se donner comme spécification que θ soit bornée. De même que pour les termes en ϵ on définit les incertitudes variant dans le temps suivantes :

$$\begin{aligned} \sin \theta &\simeq (1 - \delta_{\theta 1})\theta & , & \quad 0 \leq \delta_{\theta 1} \leq 1 - \sin \bar{\theta}/\bar{\theta} \\ \sin \theta &\simeq \delta_{\theta 2} & , & \quad |\delta_{\theta 2}| \leq \sin \bar{\theta} \\ \cos \theta &\simeq 1 - \delta_{\theta 3} & , & \quad 0 \leq \delta_{\theta 3} \leq 1 - \cos \bar{\theta} \end{aligned}$$

Attention ! Il est hors de question de linéariser le terme en $\sin \theta(F_2 + F_1)$ sinon le système devient non commandable. On peut par contre écrire :

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} + (J\omega) \wedge \omega &= -C\omega \\ &+ \begin{bmatrix} -\beta(1 - \delta_{\epsilon 3})(1 - \delta_{\theta 1}) & 0 & 0 \\ \beta\delta_{\epsilon 2}(1 - \delta_{\theta 1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha + \beta(1 - \delta_{\theta 3}))(1 - \delta_{\epsilon 1}) \end{bmatrix} \Xi \\ &+ \begin{bmatrix} d_2 & 0 \\ 0 & -x_2(1 - \delta_{\theta 1})\theta \\ 0 & x_2(1 - \delta_{\theta 3}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_2 - F_1 \\ F_2 + F_1 \end{pmatrix} + \alpha(1 - \delta_{\epsilon 1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon_0 \end{pmatrix} \\ \dot{\Xi} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta_{\epsilon 2} & 1 - \delta_{\epsilon 3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \omega \end{aligned}$$

8 Stratégie de synthèse en cascade

Ce qui suit est faux car ont été oubliés les termes quadratiques en ω ...

On remarque que avec J et C diagonales, les premières lignes de ces équations donnent :

$$J_1\ddot{\theta} = -C_1\dot{\theta} - \beta(1 - \delta_{\epsilon 3})(1 - \delta_{\theta 1})\theta + d_2(F_2 - F_1)$$

et les autres équations ne dépendent pas de $F_2 - F_1$. On peut dès lors utiliser la différence des vitesses pour commander (robustement) θ . Si une commande, $F_2 - F_1 = \Sigma_1(\theta_c - \theta)$, assure une rapidité suffisante on peut supposer que $\theta = \theta_c$, qui devient une nouvelle entrée pour le système. Mais attention dans notre modèle intervient également $\dot{\theta}$, ceci peut alors être vu comme une perturbation, notée θ_d .

Regardons maintenant la dernière ligne de nos équations :

$$J_3 \ddot{\epsilon} = -C_3 \dot{\epsilon} - (\alpha + \beta(1 - \delta_{\theta 3}))(1 - \delta_{\epsilon 1})\epsilon + x_2(1 - \delta_{\theta 3})(F_2 + F_1) + \alpha(1 - \delta_{\epsilon 1})\epsilon_0$$

On peut utiliser la somme des vitesses pour commander (robustement) ϵ . Cette commande doit être insensible aux perturbations ϵ_0 dont on sait que les dynamiques sont plutôt basse fréquence. Si une commande, $F_2 + F_1 = \Sigma_2(\epsilon_c - \epsilon)$, assure une rapidité suffisante on peut supposer que $\epsilon = \epsilon_c$ et $F_2 + F_1$ converge nécessairement vers une valeur mesurable, notée F_∞ .

On se propose alors pour commander λ de faire une commande LPV-robuste dépendant du paramètre F_∞ . Elle doit avoir des dynamiques plus lentes que les précédentes. Son entrée de commande est θ_c . Elle doit être au maximum insensible à la perturbation θ_d .

$$\begin{aligned} J_2 \dot{\omega}_2 &= -C_2 \omega_2 + (\beta \delta_{\epsilon 2} - x_2 F_\infty)(1 - \delta_{\theta 1}) \theta_c \\ \dot{\lambda} &= (1 - \delta_{\epsilon 3}) \omega_2 + \delta_{\epsilon 2} \theta_d \end{aligned}$$

On remarquera que pour que ce système soit commandable il est nécessaire que F_∞ soit non nul. On peut donc envisager un opérateur logique qui force $F_2 + F_1$ à être non nul (positif de préférence) tant que λ n'est pas à la consigne. Pour ce faire, le plus simple est de donner une consigne virtuelle $\tilde{\epsilon}_c > 0$ tant que $\lambda_c - \lambda \neq 0$. Par exemple on peut penser à quelque chose comme :

$$\begin{aligned} \text{si } F_2 + F_1 > \bar{F}_\infty &: \tilde{\epsilon}_c = \epsilon_c \\ \text{si } 0 \leq F_2 + F_1 \leq \bar{F}_\infty &: \tilde{\epsilon}_c = \epsilon_c + \gamma |\lambda_c - \lambda| \\ \text{si } 0 \geq \epsilon_c \geq \underline{\epsilon}_c &: \tilde{\epsilon}_c = \epsilon_c - \gamma |\lambda_c - \lambda| \\ \text{si } \epsilon_c < \underline{\epsilon}_c &: \tilde{\epsilon}_c = \epsilon_c \end{aligned}$$

9 Influence de la masse variable

Les travaux d'identification de Mounira Bouarroudj concluent que la masse mobile n'a pas d'influence décelable sur les paramètres du modèle, sauf pour le paramètre perturbateur

$$\epsilon_0 = -\frac{8}{25} \frac{\pi}{180} p$$

où p est la position de la masse variable en partant de l'axe de rotation des λ . Ce paramètre peut être piloté à notre guise entre 0 et 28 centimètres.