

# Journées DISCO

13-14 novembre 2006

Elodie Chanthery



# Plan

- Coursus
- Travaux de recherche
- Projet de recherche

- Coursus
- Travaux de recherche
  - ◆ DEA
  - ◆ Travaux de thèse
  - ◆ Année 2005/2006
- Projet de recherche

➤ depuis septembre 2006 **Maître de conférence INSA /LAAS**



➤ 2005-2006 **Enseignant-chercheur à l'EPMI (95)**

➤ 2002-2005 **Docteur SUPAERO, spécialité systèmes**



✦ Laboratoire ONERA/DCSD

✦ Titre: Planification de mission pour un véhicule aérien autonome

✦ Mention très honorable avec les félicitations du jury

✦ Responsables : R. Chatila (LAAS/CNRS), M. Barbier et J-L. Farges (ONERA/DCSD)

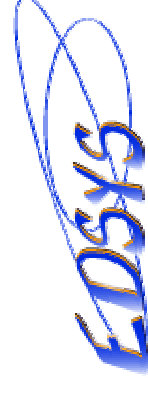
✦ Jury :

D. Luzeaux, HDR, DGA

E. Sandewall, professeur, Université de Linköping, Suède

J-H. Llareus, professeur, SupAéro

➤ 2002 **DEA – EDSYS Systèmes Automatiques**



✦ Stage réalisé à l'ONERA/DCSD

➤ 1999-2002 **Ingénieur ENSEEIHT**



✦ Filière Génie Electrique et Automatique

✦ Spécialisation Automatique et Informatique Industrielle

# Plan

- **Cursus**
- **Travaux de recherche**
- **Projets de recherche**

➤ **Cursus**

➤ **Travaux de recherche**

◆ **DEA**

◆ **Travaux de thèse**

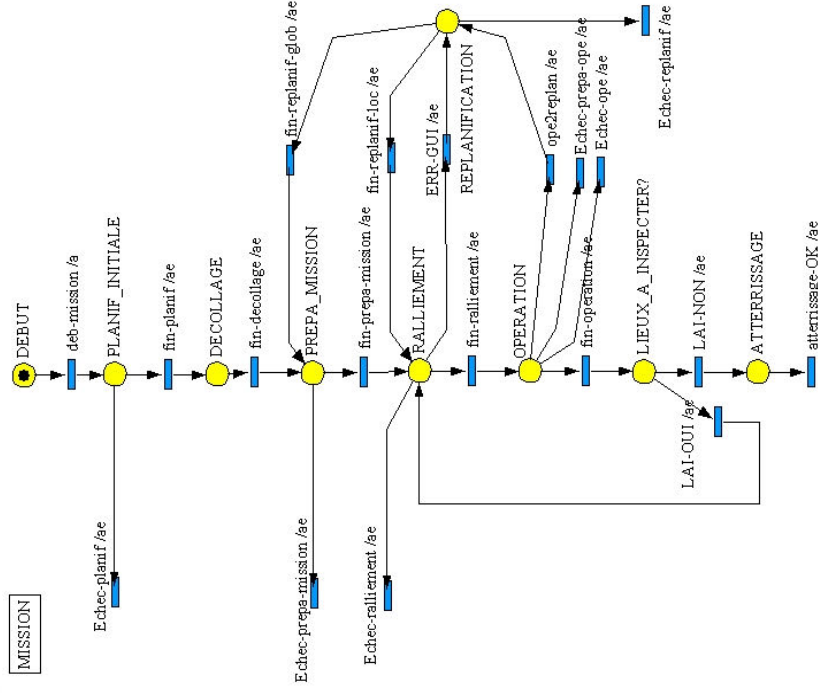
◆ **Travaux depuis septembre 2005**

➤ **Projets de recherche**



**Contexte** En utilisant l'expérience du Département Commande des Systèmes et Dynamique du Vol sur la gestion de mission d'un véhicule sous-marin autonome

- Développement d'un **logiciel embarqué de gestion de mission**
- Spécification du comportement du véhicule à l'aide de **réseaux de Petri** en nominal et dégradé



- ◆ Place active de MISSION =

→ phase de la mission

→ procédure complexe de plus en plus détaillée un ou plusieurs réseaux fils

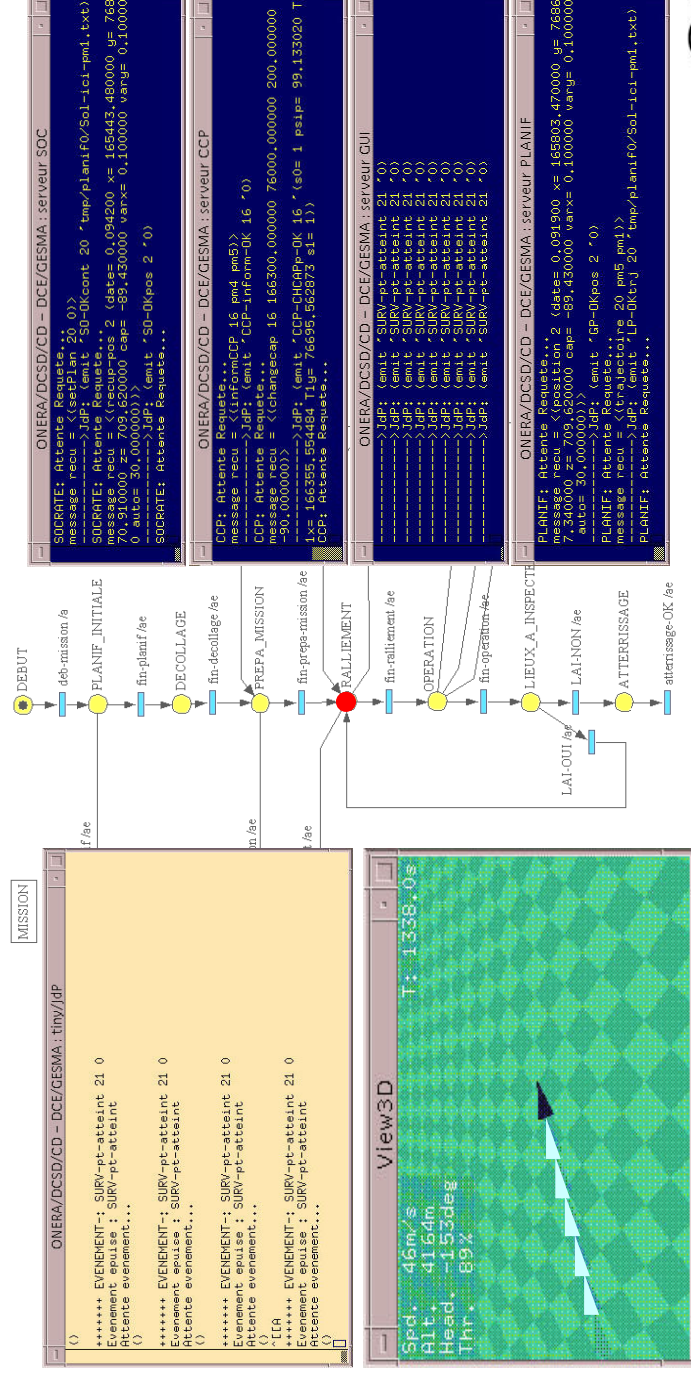
- ◆ Réseaux génériques : réutilisabilité, modularité

# Stage de DEA

- Coursus
- DEA
- Projets de recherche

**Contexte** En utilisant l'expérience du Département Commande des Systèmes et Dynamique du Vol sur la gestion de mission d'un véhicule sous-marin autonome

- Développement d'un **logiciel embarqué de gestion de mission**
- ◆ Spécification du comportement du véhicule à l'aide de **réseaux de Petri** en
- ◆ **Architecture PEDRO** validée avec une mission type
  - Communication entre des sous-systèmes en C, les RdP, le Joueur de Petri en
  - Visualisation 3D temps réel



# Stage de DEA

- Coursus
- DEA
- Projets de recherche

**Contexte** En utilisant l'expérience du Département Commande des Systèmes et Dynamique du Vol sur la gestion de mission d'un véhicule sous-marin autonome

- Développement d'un **logiciel embarqué de gestion de mission**
  - ◆ Spécification du comportement du véhicule à l'aide de **réseaux de Petri** en
  - ◆ **Architecture PEDRO** validée avec une mission type

## Conclusion

- ◆ Visibilité meilleure du système
- ◆ Réutilisabilité
- ◆ Banc test pour des algorithmes de planification

A suivre

**thèse: planification de mission pour un véhicule aérien autonome**

➤ M. Barbier, E. Chantry *Autonomous Mission Management for Unmanned Aerial Vehicles - Aerospace Science and Technology*, Vol 8, Issue 4, June 2004

➤ E. Chantry, M. Barbier *Functionnal Modules for Intermixed Planning and Execution of an Observation Mission - 18th Bristol UAV Conference*, 2003

ONERA

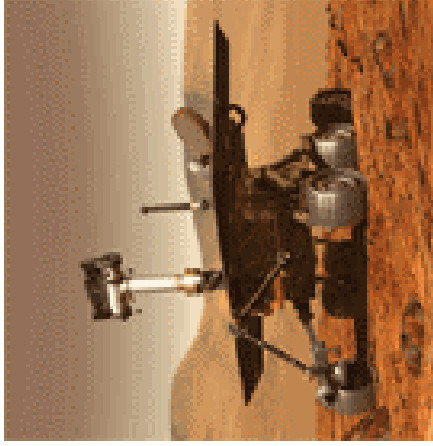


# Introduction

## Introduction

- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

Contexte : engins autonomes inhabités



Rover sur MARS

(source : NASA Jet Propulsion Laboratory)



REMUS

(source: Office of Naval Research)



EAGLE (source: EADS)

- Missions dangereuses, longue durée
- Communications limitées
- Dates imprévisibles pour les événements affectant la mission

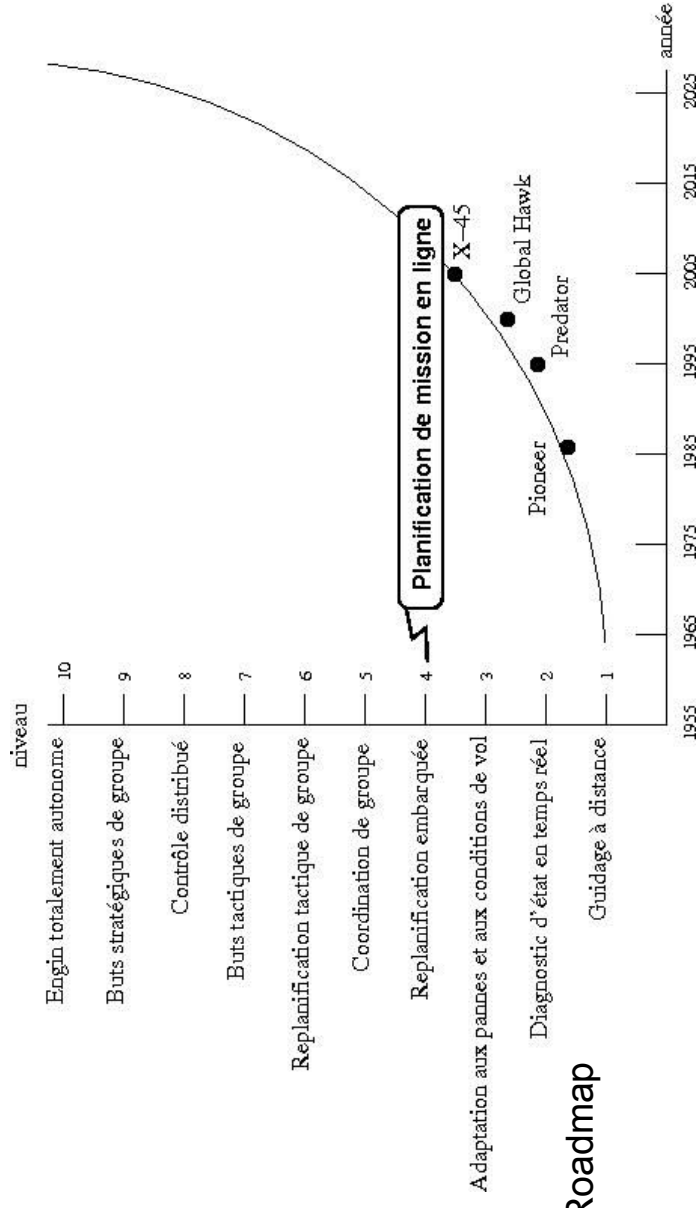
**“Aléa** : événement pouvant survenir en cours de mission dont la date d’occurrence est imprévisible.”



# Introduction

- **Introduction**
- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

- Objectifs pour un engin autonome
  - ◆ effectuer au mieux sa mission
  - ◆ réagir aux aléas mission, environnement et véhicule
- Niveau d'autonomie visé : replanification embarquée
- Calcul de plans



Source: OSD UAV Roadmap  
2002-2027

# Introduction

## Introduction

- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

- Objectifs pour un engin autonome
  - ◆ effectuer au mieux sa mission
  - ◆ réagir aux aléas mission, environnement et véhicule
- Niveau d'autonomie visé : replanification embarquée
- Calcul de plans

## Planification hors ligne

- Pendant la préparation de mission
- Plan = arbre d'actions
- Prévoir et traiter tous les événements possibles
- Exemple : planification conditionnelle

## Planification en ligne

- Pendant l'exécution de la mission
- Plan = séquence d'actions
- Savoir réagir à un événement connu
- Exemples : planification continue, planification sur événements

## Objectif de la thèse → Autonomie décisionnelle embarquée

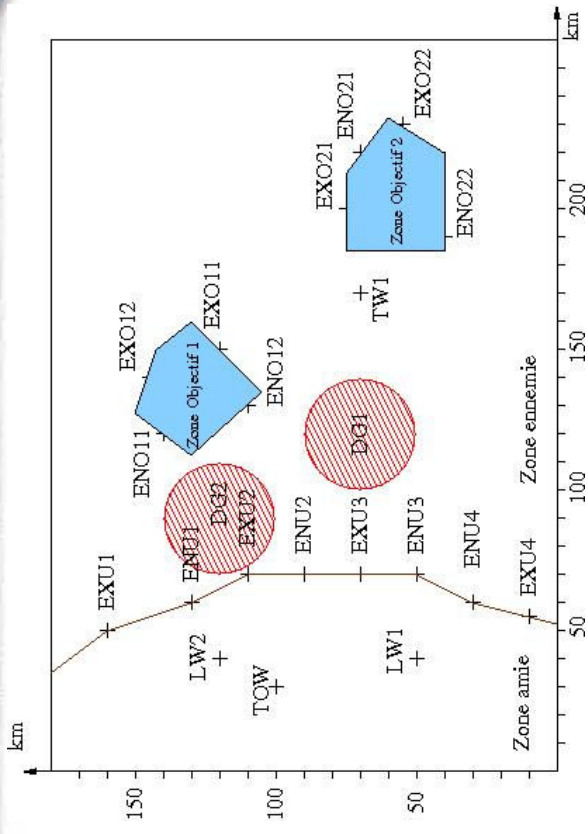
- modèle et méthodes pour la replanification
- intégration dans le système bord

# Illustration

## Introduction

- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

- Mission militaire d'observation pour un véhicule aérien autonome
- Environnement 3D, dynamique, incertain et dangereux
- Contraintes de mission  
objectifs, environnement, véhicule



## Fonction de planification embarquée

- Sélectionne et ordonne le meilleur sous-ensemble d'objectifs
- Détermine la date d'arrivée à chaque point de passage
- Maximise sous contraintes les récompenses sur les observations, minimise les critères sur le danger, la consommation de carburant



# La planification de mission

➤ Introduction

➤ Présentation et formalisation du problème de planification

➤ Résolution algorithmique

➤ Intégration du planificateur dans une architecture embarquée

➤ Tests

➤ Conclusions

## ➤ Mission

- Séquencer des actions : mouvements, collectes d'information ...
- Avec une quantité limitée de ressources : **énergie, mémoire**, *probabilité de survie* : *Quantité liée à l'incertitude Quantités physiques*
- Pour réaliser un ensemble d'objectifs

## But de la planification Choisir les objectifs et les actions pour les réaliser

La solution proposée

- Optimise un critère : récompense et coût de réalisation par objectif
- Prend en compte les contraintes de temps et de ressources

Récompenses et contraintes parfois non linéaires par rapport au temps

## ➤ Littérature

- Ordonnement d'objectifs
- Sélection d'objectifs
- Prise en compte de l'incertitude
  - PDM, PDMPO [Teichtell & Fabiani 2005] [Schesvold et al 2003]

# Formalisation du problème

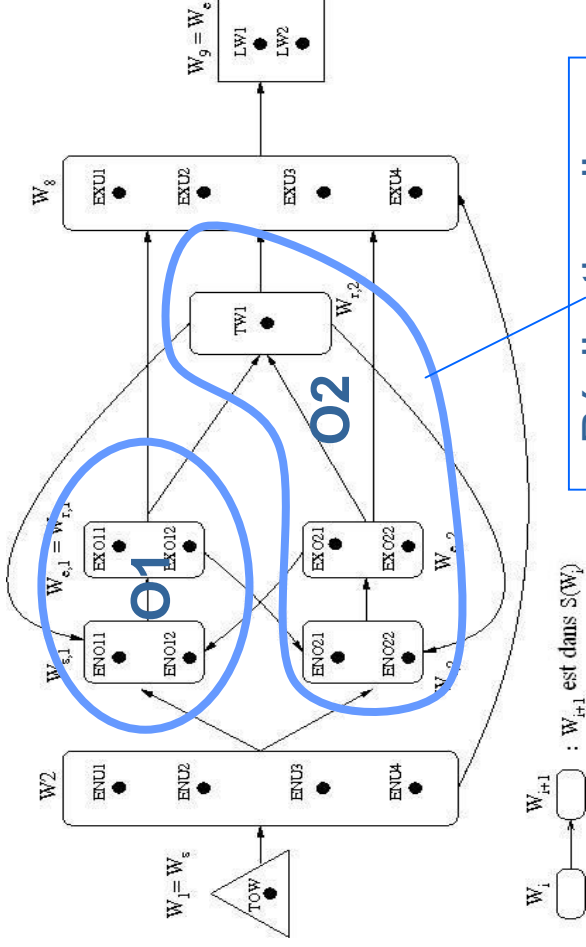
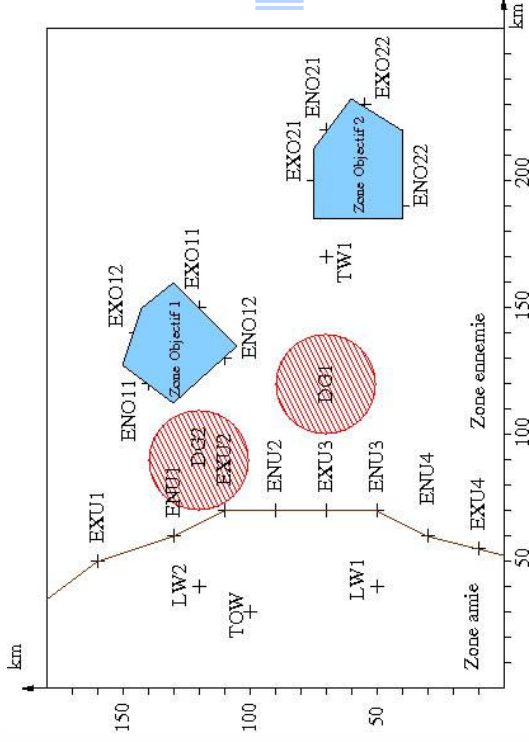
- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions



**Idée** tirer parti du principe d'abstraction pour organiser la description

Noeud de bas niveau : point de passage

Supernoeud = noeud de haut niveau : ensemble de noeuds de bas niveau



**N** ensemble de noeuds

**W** = { $W_1, \dots, W_e$ } partition de N

Relation **S** :  $S(W_i)$  sous-ensemble des successeurs de  $W_i$

Fonctions de coûts, récompenses sur les arcs (non sommables)

# Pour résumer

- Introduction
- **Présentation et formalisation du problème de planification**
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

- Formalisation générique du problème de planification de mission
  - ✦ haut niveau : réalisation des objectifs
  - ✦ bas niveau : choix des nœuds, des actions, des vitesses entre les nœuds
- Pertinence du formalisme montrée par son paramétrage sur un exemple de mission militaire d'observation pour un drone
- Complexité du problème de planification de mission

Nombre de zones objectif	fin	entrées/ sorties d'objectif	transmission	Nombre de chemins
2	2	2	1	190
5	4	2	2	$10^8$

➔ méthodes d'exploration arborescentes adaptées



# Cadre algorithmique

- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- **Résolution algorithmique**
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

- ➔ inspiré de l'algorithme A\*
- ➔ adapté pour la replanification en ligne

Début

Recherche d'une première solution admissible  
**si** une première séquence admissible a été trouvée **alors** Initialiser BORNE avec le J trouvé

Placer  $n_1$  dans listeP

**tant que** listeP n'est pas vide **faire**

**pour** chaque  $n_i$  dans S( $\hat{u}$ ) **faire**

listeT =  $\emptyset$

**pour** chaque action a possible **faire**

Construire la séquence de  $n_i$  à  $(n_i, a)$

**Optimiser** l en choisissant les dates pour chaque noeud en respectant les contraintes

**si** il y a une solution **alors**

Calculer h de  $(n_i, a)$  à un noeud fin

Stocker dans  $n_i$  : l = g et h

Ajouter  $(n_i, a)$  dans listeT

**si**  $n_i \in W_g$  et l < BORNE **alors** BORNE  $\leftarrow$  l

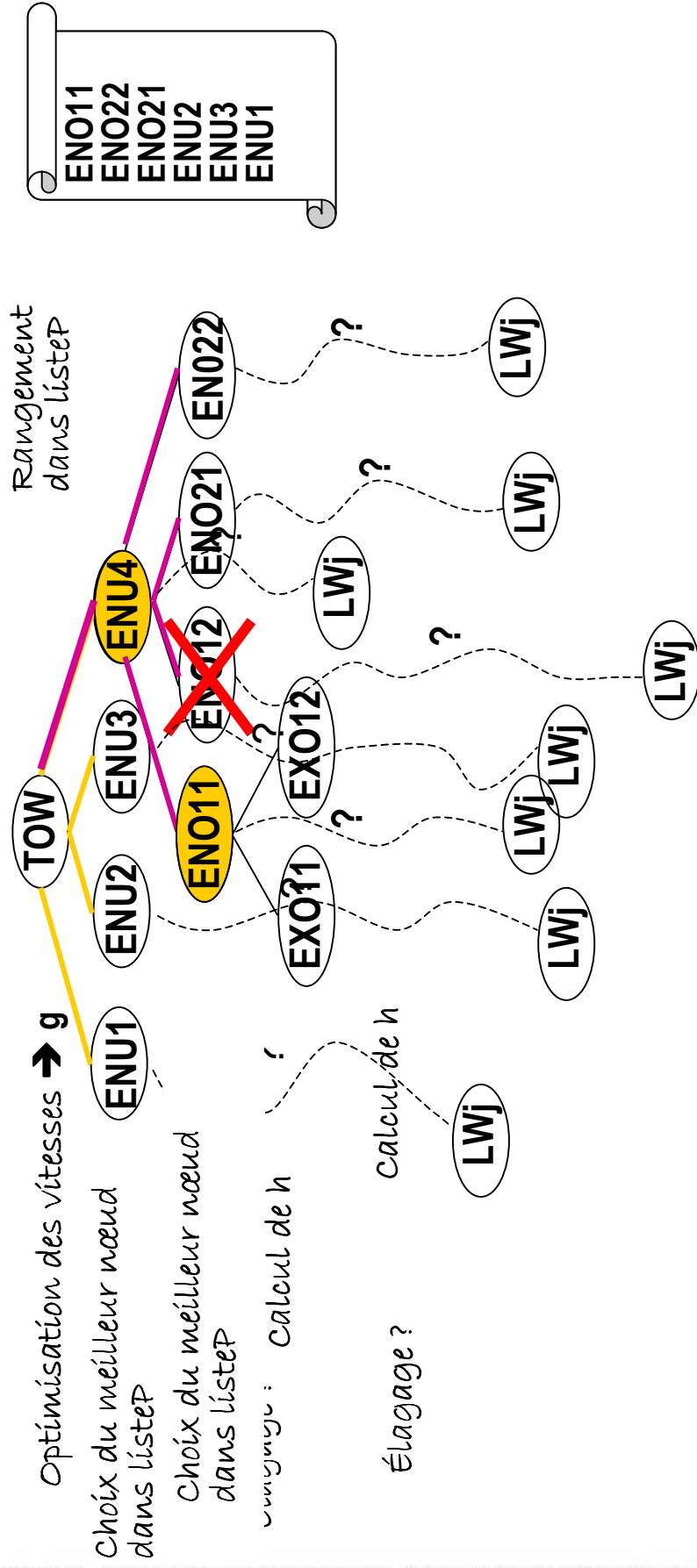
Elaguer l'arbre d'exploration

Mettre les éléments de listeT dans listeP

Effacer  $\hat{u}$  de listeP

# Développement de l'arbre

- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- **Résolution algorithmique**
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions



# Traitement des contraintes et optimisation du critère

- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- **Résolution algorithmique**
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

- Contraintes non linéaires par rapport aux durées  
➔ fonctions de pénalisation
- Contraintes linéaires par rapport aux durées dans un simplexe
- Optimisation des durées basée sur l'algorithme de Frank & Wolfe
- Méthodes d'évaluation du critère
- Méthodes d'élagage
- Méthodes de rangement

➔ 16 heuristiques

Pour la suite

- Evaluation sur des problèmes de replanification en ligne  
➔ Tests
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée



# Architectures des systèmes autonomes

Introduction

Présentation et formalisation du problème de planification

Résolution algorithmique

Intégration du planificateur dans une architecture embarquée

Tests

Conclusions

- Architectures réactives
  - ✦ pas de plan à long terme
  - ✦ réaction rapide aux aléas
- Architectures délibératives
  - ✦ plan à long terme
  - ✦ réaction lente aux aléas
- Architectures hybrides
  - ✦ combinaison des avantages

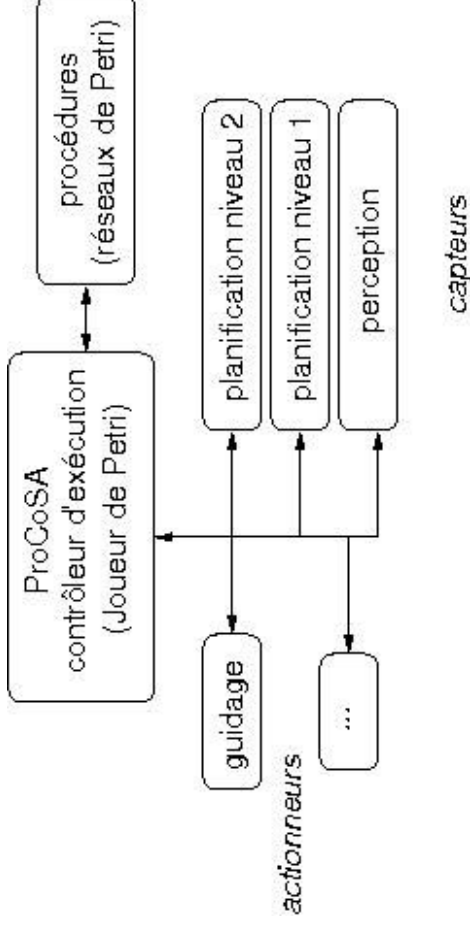
## Choix

➔ architecture hybride hiérarchique dédiée à la réalisation d'une mission

# Environnement logiciel

- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

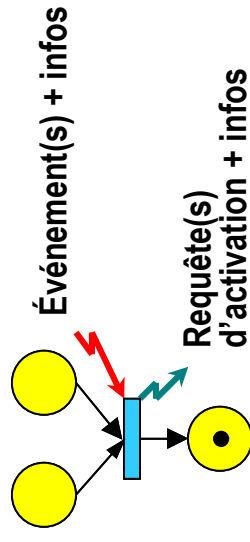
## ProCoSA PROgrammation et COntôle des Systèmes à forte Autonomie



- **Hors ligne** : spécification des procédures de comportements du véhicule (codage par réseaux de Petri) et des déclenchements des processus
- **En ligne** : exécution des procédures, dont réactions aux aléas

place  $\Leftrightarrow$  état, activité ou macro-activité

transition  $\Leftrightarrow$  changement d'état



# Fonctionnalités

- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

## ➤ Effectuer la mission

- ◆ gérer les données opérateurs et capteurs de navigation
- ◆ enchaîner les actions de plan
- ◆ rallier les points de passage, activer et désactiver la charge utile
- ◆ calculer les consignes de guidage
- ◆ contrôler le déroulement des phases de calculs et d'actions

## ➤ Réagir aux aléas

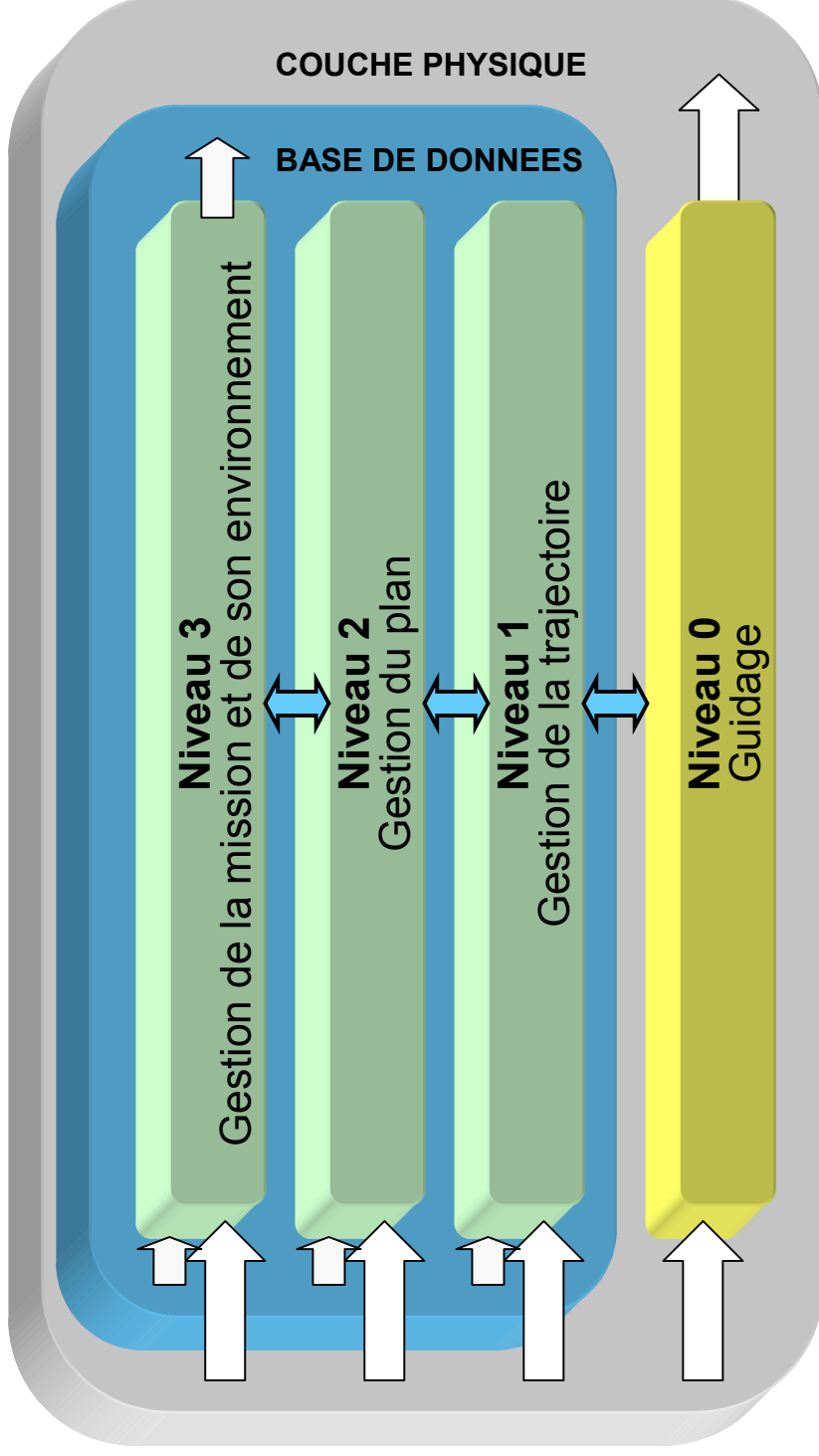
- ◆ mettre à jour les cartes de danger et/ou de mission
- ◆ recalculer un plan
  - modification de la mission
  - données environnement prévues et observées incohérentes
  - trajectoire irréalisable
  - consignes de guidage non applicables



# Architecture hybride hiérarchique

- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

## Organisation des niveaux



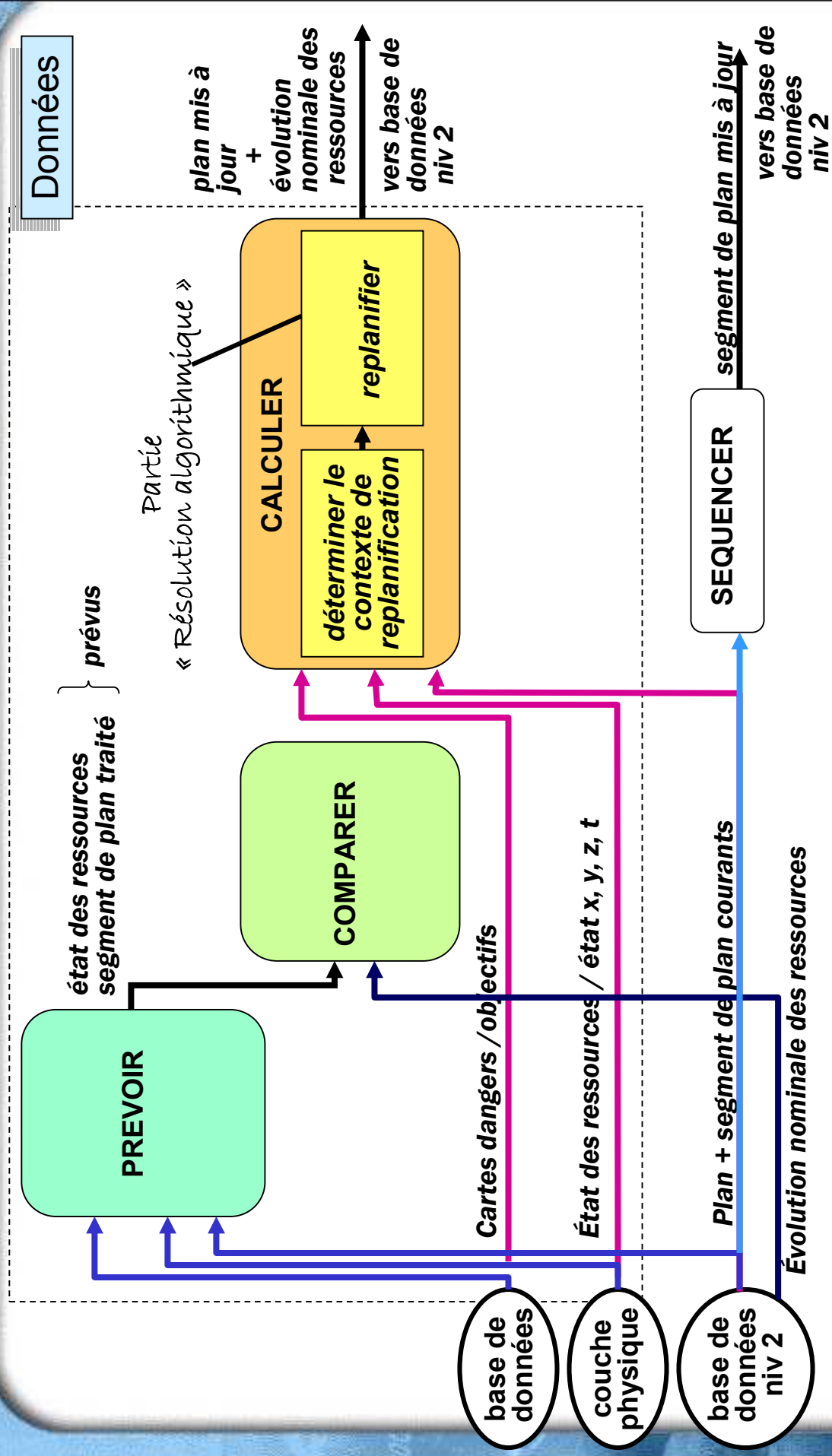
➤ 3 niveaux délibératifs

➤ 1 niveau réactif

# Développement

- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

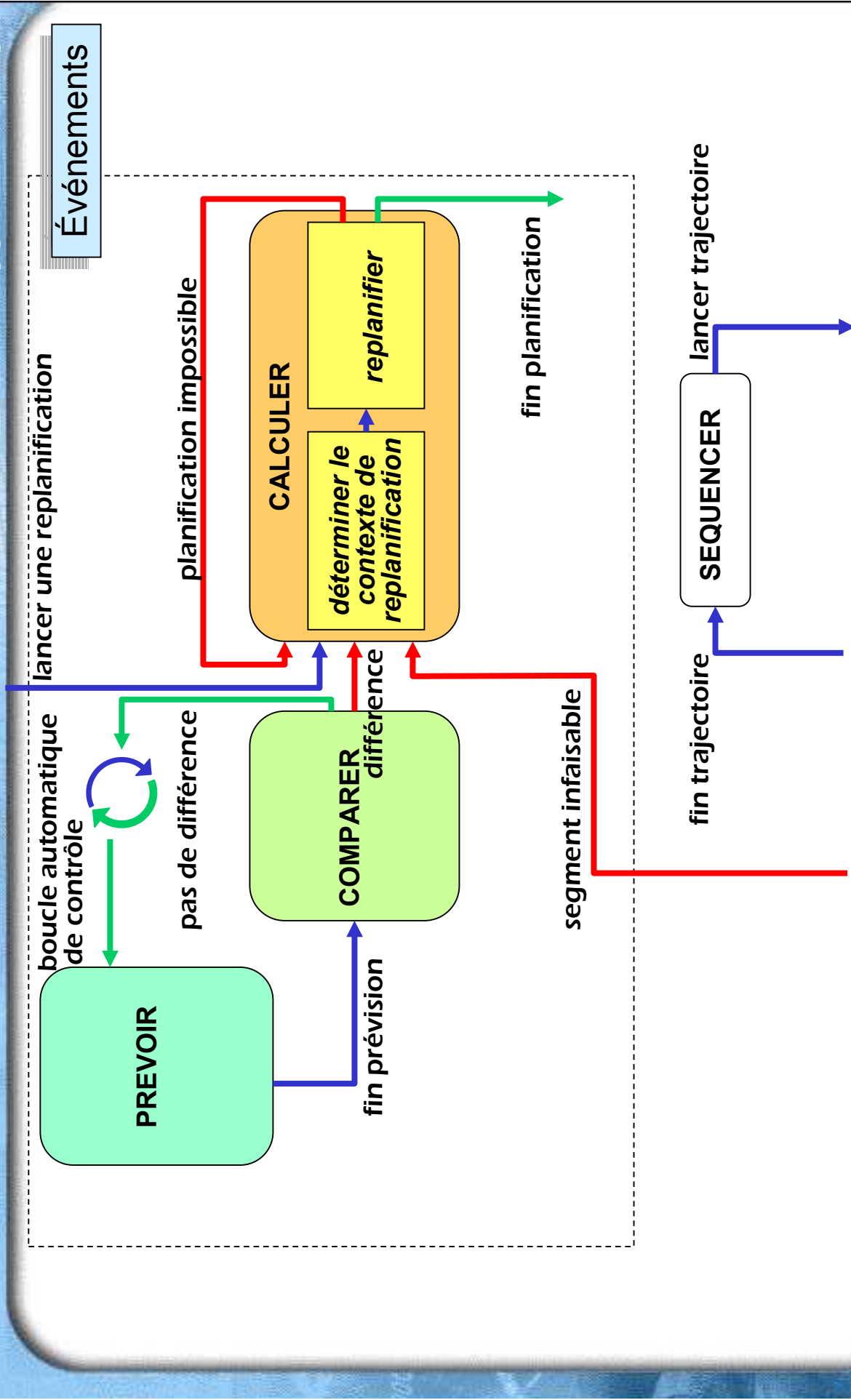
## EXEMPLE SUR LE NIVEAU 2



# Développement

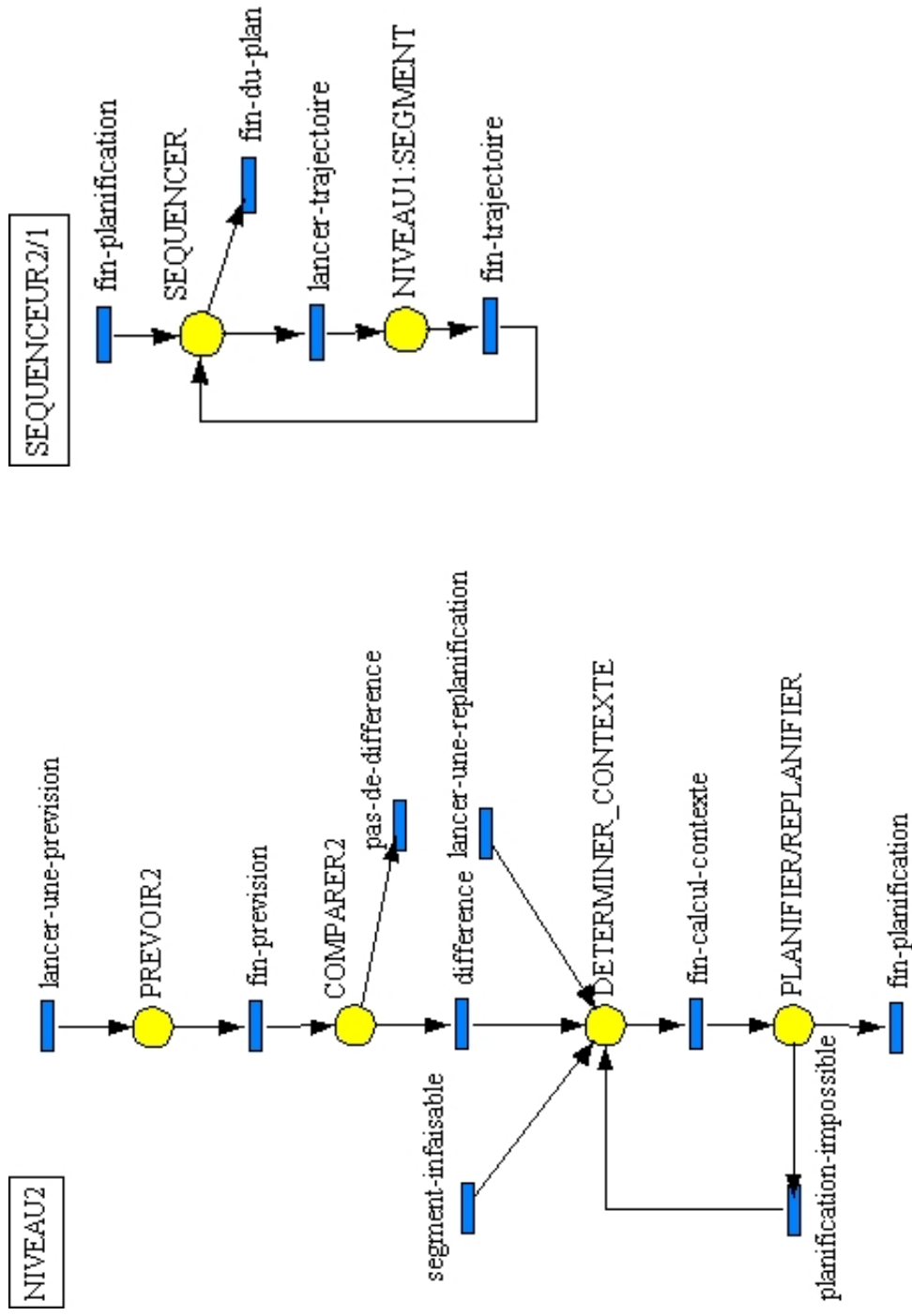
- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

## EXEMPLE SUR LE NIVEAU 2





# Exemples de procédures ProCoSA



# Exigences temporelles pour la replanification

- Evaluation du plan courant dans un nouveau contexte →  $J_C$ ,
- Classification des problèmes de replanification & Critères d'évaluation

➤  $J_{MAX}$  : risque d'échec trop élevé

**Cas 1:** si  $J_C > J_{MAX}$ , échec de la mission

➔ solution avant  $\delta_r$   
replanification dite « critique »



• qualité de la première solution admissible avant  $\delta_r$   
• qualité de la meilleure solution avant  $\delta_1$  fixé

**Cas 2:** si  $0 \leq J_C \leq J_{MAX}$ , plan courant mauvais, mais durée de calcul moyenne acceptée

➔ amélioration significative avant  $\delta_2$   
replanification dite « nécessaire »



• qualité de la première solution significativement meilleure  
• qualité de la meilleure solution avant  $\delta_2$  fixé

**Cas 3:** si  $J_C < 0$ , pas de risque d'échec

➔ amélioration avant  $\delta_3$   
replanification dite « éventuelle »



• qualité de la meilleure solution avant  $\delta_3$  fixé

# Pour résumer

- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

## ➤ Cadre du travail

- ◆ replanification en ligne déclenchée sur événements
- ◆ architecture hybride hiérarchique
- ◆ ProCoSA pour implémenter l'architecture et effectuer la mission

## ➤ Architecture hybride hiérarchique

- ◆ 4 niveaux de la gestion de la mission jusqu'au guidage
- ◆ mise en œuvre de la fonction de replanification
- ◆ fonction de détermination du contexte de replanification

## ➤ Analyse de la qualité du plan courant

- ◆ spécification du temps laissé au planificateur pour donner un résultat
  - ◆ critères de performances pour comparer les différentes méthodes
- ➔ Tests



# Présentation

- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- **Tests**
- Conclusions

## Véhicule

- Système de drone MALE
  - ◆ altitude entre 5000m et 15000m
  - ◆ endurance entre 10h et 50h
- Caractéristiques proches du Predator



## Missions et environnements

Predator B  
(source : U.S Air Force)

Mission	Nombre de zones objectif	Nombre d'entrées/ sorties	Navigation
1	6	2	ligne droite contournement balayage
2	4	2	ligne droite contournement balayage
3	6	4	ligne droite contournement balayage
4	6	2	ligne droite balayage

# Scénarios

- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- **Tests**
- Conclusions

➤ Pour chaque mission

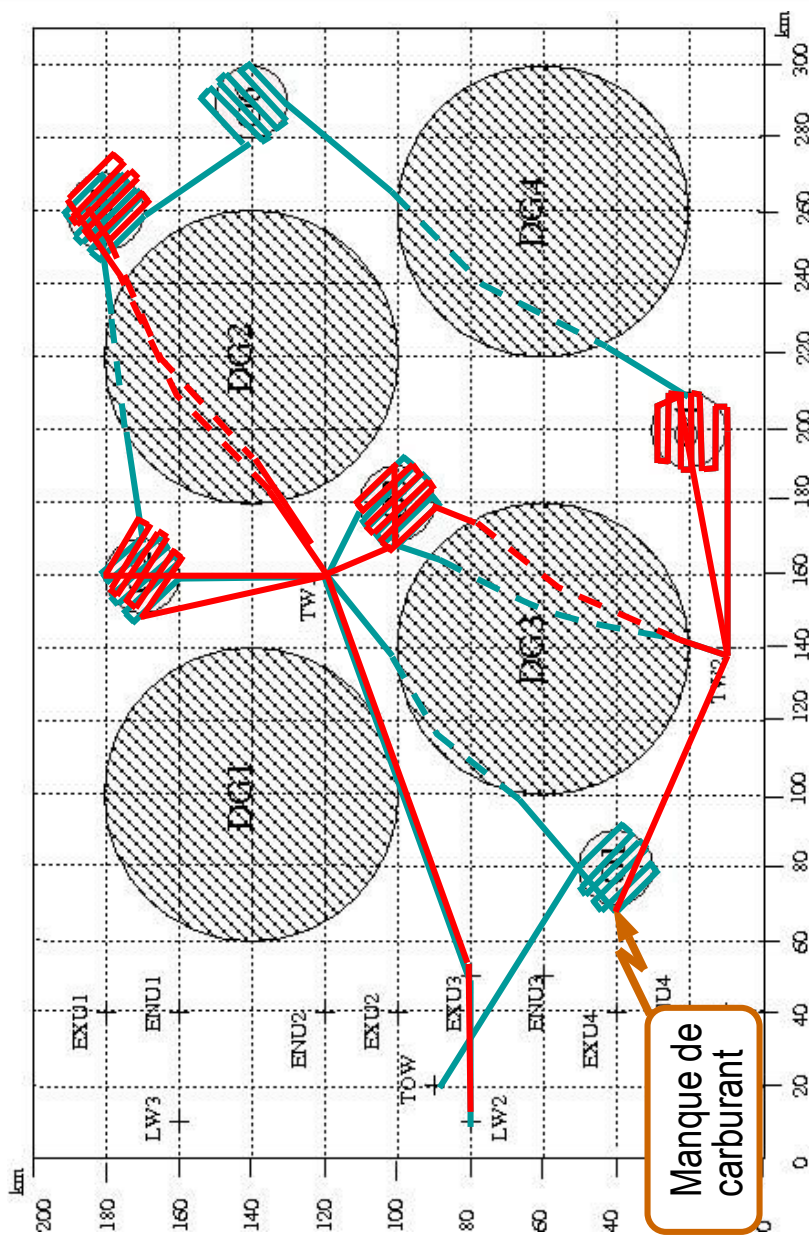
- ◆ 3 instants de replanification
- ◆ 3 événements déclenchants : fuite de carburant, changement de la carte des dangers, changement de la carte des objectifs

➔ 9 scénarios de replanification par mission

## Mission 1

36 scénarios testés  
sur 16 combinaisons  
de méthodes

➔ 72 critères



# Tests

- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests**
- Conclusions

 72 critères

➤ Utilisation de critère global : sommation pondérée par les fréquences d'occurrence des scénarios

➤ Etude de robustesse pour les fréquences d'occurrence, mal connues

 Une méthode d'analyse originale

➤ Analyse multicritère (Electre)

 **Choix d'un planificateur unique**



# Conclusions

- Introduction
- Présentation et formalisation du problème de planification
- Résolution algorithmique
- Intégration du planificateur dans une architecture embarquée
- Tests
- Conclusions

## Problème de planification

Choisir et ordonner un sous-ensemble d'objectifs à réaliser. Optimiser les actions, connaissant les ressources, l'environnement, la récompense associée à chaque objectif et les contraintes temporelles

- Proposition d'un cadre formel basé sur une décomposition en deux niveaux
  - ➔ Formalisation d'un problème avec incertitudes et où le nombre d'objectifs dans le plan n'est pas fixé *a priori*
- Cadre algorithmique basé sur le  $A^*$  et adapté aux spécificités du problème
  - ➔ Résolution du problème de choix, d'ordonnancement et d'optimisation sous contraintes
- Intégration de la planification dans une architecture embarquée
  - ➔ Le véhicule est doté d'une autonomie décisionnelle embarquée
- Tests sur 36 scénarios de replanification

# Recherches pour l'année 2005/2006

- Cours
- Travaux de recherche
- Projet de recherche

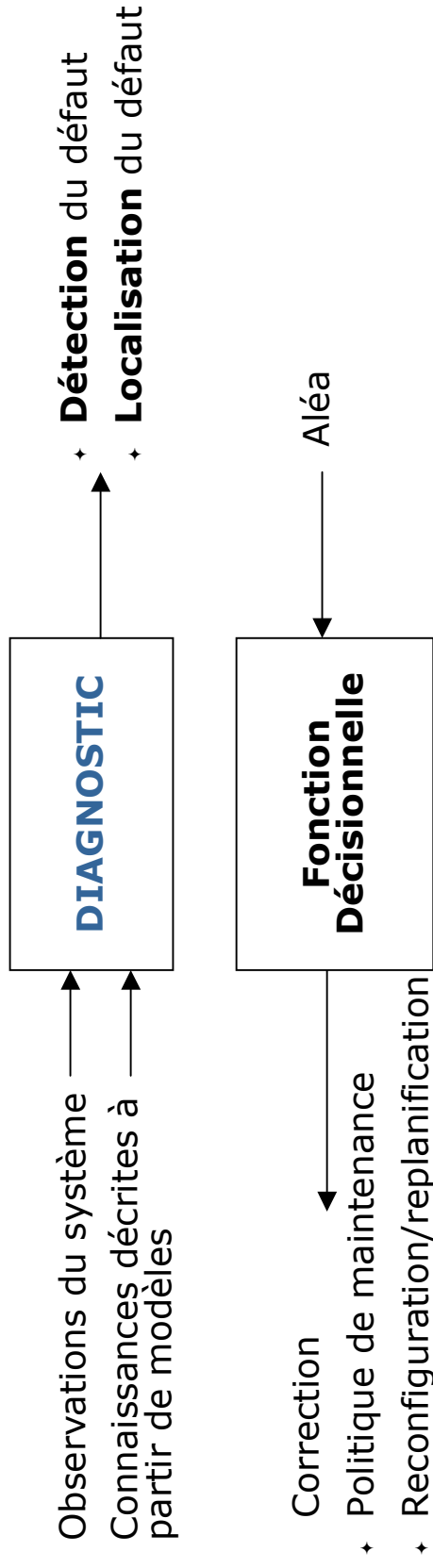
## Cadre : Diagnostic des systèmes hybrides, partie SED

### Contexte

Collaboration avec C. Combastel de l'équipe ECS sur la partie Diagnostic et Méthodes Ensemblistes (DIAME)

### système hybride

Système où il existe des interactions non triviales entre des composantes discrètes et des composantes continues



# Travaux et perspectives

- Cours
- Travaux de recherche
- Projet de recherche

## Objectifs

- ✦ Diagnostic sur un système complexe hybride
- ✦ Application : ligne de production flexible du laboratoire de productique de l'EPMI

## Travaux

- ✦ Etat de l'art sur le diagnostic des systèmes hybrides
  - Modélisation : réseaux de Petri hybrides, algèbre maxplus/minplus, machines à état
  - Méthodes d'estimation
  - Diagnostic (Filtre particulière, ...)
- ✦ Développement d'une plate-forme de simulation de la ligne en vue de la modélisation



## Perspectives

- ✦ Modélisation d'un système hybride : à base de réseaux de Petri
  - prenant en compte les lots
  - hybride
- ✦ Diagnostic en ligne
- ✦ Intégration dans une architecture de contrôle prenant en compte des reconfigurations
- ✦ Tests



# Plan

- **Cursus**
- **Travaux de recherche**
- **Projet de recherche**

- **Cursus**
- **Travaux de recherche**
  - ◆ **DEA**
  - ◆ **Travaux de thèse**
  - ◆ **Année 2005/2006**
- **Projet de recherche**

## Diagnostic des systèmes hybrides en vue d'une reconfiguration

- **Système hybride** Système où il existe des interactions non triviales entre des composantes discrètes et des composantes continues
- **En particulier** Systèmes réels construits à partir de
  - ✦ composants matériels → comportement continu
  - ✦ contrôlés par une partie logicielle → composante discrète
- **Contexte** Les approches existantes à base de modèle permettent d'effectuer un diagnostic sur des SDH, mais souvent sans tenir compte des informations produites par la partie logicielle
- **Objectif** Prendre en compte ces informations → enrichir les méthodes de diagnostic existantes, en vue d'une phase de reconfiguration qui pourra utiliser des informations provenant de la fonction de diagnostic
- **Application**
  - ✦ Véhicules/engins munis d'autonomie : drone, satellites, automobile...
  - ✦ Ligne de production automatisée

# Organisation du travail

- Cours
- Travaux de recherche
- Projet de recherche

## 1 . Etude bibliographique

- ✦ De quelles informations dispose-t-on par la partie logicielle? (études menées par la sûreté de fonctionnement)
- ✦ Mise en place d'un vocabulaire commun au diagnostic et à la sûreté de fonctionnement

## 2 . Est-il possible d'intégrer ces informations à une fonction de diagnostic?

### 3 . Implémentation

- ✦ Sur un exemple concret de système hybride, construire une telle fonction de diagnostic
- ✦ Garder à l'esprit que les informations rendues seront utilisées par la fonction de reconfiguration (replanification / réparation)

## 4. Intégration dans une architecture de contrôle

# Insertion dans l'équipe de recherche DISCO

## ➤ **Connaissances**

- ✦ **Domaine de l'Intelligence Artificielle**
  - Techniques de recherche opérationnelle et d'optimisation sous contraintes
  - Modèles et méthodes pour le suivi de situation, la décision et la planification dans l'incertain

## ➤ **Axe Diagnostic et décision – Approches à base de modèle**

- ✦ Une bonne connaissance des communautés de l'Automatique et de l'Intelligence artificielle
- ✦ Supervision et diagnostic pour systèmes à événements discrets
  - Réseaux de Petri
  - Architecture de contrôle

## ➤ **Axe Surveillance et Supervision par des méthodes d'apprentissage**

- ✦ ProCoSA : un outil pour la supervision et le suivi de situation adapté à l'opérateur



# Principales Publications

## Livres et Revues

**Planification de mission pour un véhicule aérien autonome** E. CHANTHERY, manuscrit de thèse, 2005

## **Integration of Mission Planning and Flight Scheduling for Unmanned Aerial Vehicles**

E. CHANTHERY, M. BARBIER, J-L. FARGES, "Planning, Scheduling and Constraint Satisfaction : from Theory to Practice" séries "Frontiers in Artificial Intelligence and Applications", IOS Press, p 109-118, February 2005

## **Autonomous Mission Management for Unmanned Aerial Vehicles** M. BARBIER, E. CHANTHERY

Aerospace Science and Technology, Volume 8, Issue 4 , June 2004, Pages 359-368

## Congrès

**Planning Algorithms for Autonomous Aerial Vehicle** E. CHANTHERY, M. BARBIER, J-L. FARGES  
6th IFAC World Congress, July 4-8, 2005, Prague, Czech Republic

**On-Line Mission Planning for Autonomous Vehicles** E. CHANTHERY, M. BARBIER, J-L. FARGES  
ICAPS'05 - International Workshop on "Planning under Uncertainty for Autonomous Systems", 2005, USA

**Integration of Mission Planning and Flight Scheduling for Unmanned Aerial Vehicles** E. CHANTHERY, M. BARBIER, J-L. FARGES ECAI'04 - Workshop on "Planning and Scheduling: Bridging Theory to Practice", 2004, Spain

**Mission Planning for Autonomous Aerial Vehicles** E. CHANTHERY, M. BARBIER, J-L. FARGES  
IAV2004 - 5th IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles, 2004, Portugal

## **Planification de Mission pour un Véhicule Aérien Autonome**

E. CHANTHERY Congrès EDSYS04, ENSICA, 13 et 14 mai 2004, Toulouse, France

## **Autonomous Mission Management for UAVs**

M. BARBIER, E. CHANTHERY, ODAS 2003 : 5th ONERA-DLR Aerospace Symposium, 4-6 juin 2003, Toulouse

## **Functional Modules for Intermixed Planning and Execution of an Observation Mission**

E. CHANTHERY, M. BARBIER, 18th Bristol UAV Systems Conference, 31st March, 2nd April 2003, Bristol United Kingdom

## Communications

Séminaire ECS "Planification de mission pour un véhicule aérien autonome", **ENSEA, 2005** E. CHANTHERY

Séminaire Féria SD "Optimisation de la décision", **LAAS, Janvier 2005** E. CHANTHERY, S. DAMIANI

Merci

$$\begin{aligned} & p_U \frac{\partial v}{\partial x} + p_U \frac{\partial v}{\partial y} + p_U \frac{\partial v}{\partial z} \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \\ & = E_v + \sqrt{N} Q (1 - p_U) \\ & = \sqrt{N} Q (P_U) + Q (1 - p_U) \\ & P_U = E_v / P = \frac{1}{\sqrt{2} N} \left( \frac{1}{\sqrt{2} N} \right) \end{aligned}$$